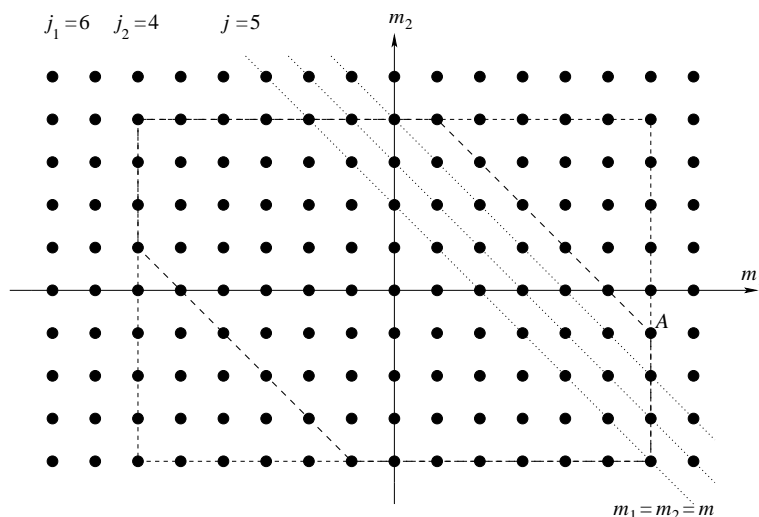


HILFREICHE GRAPHISCHE DARSTELLUNG

Um zu sehen, welche Zustände bei der Addition von Drehimpulsen auftreten können, und wie diese durch die Wirkung der Auf- und Absteigeoperatoren  $J_+, J_{1,+}, J_{2,+}$  bzw.  $J_-, J_{1,-}, J_{2,-}$  miteinander in Beziehung stehen, ist es hilfreich, sich dies graphisch in der  $(m_1, m_2)$ -Ebene der magnetischen Quantenzahlen zu veranschaulichen. Wir wissen, dass die Clebsch-Gordan-Koeffizienten  $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle$  nur dann nicht verschwinden, wenn  $m = m_1 + m_2$  ist.



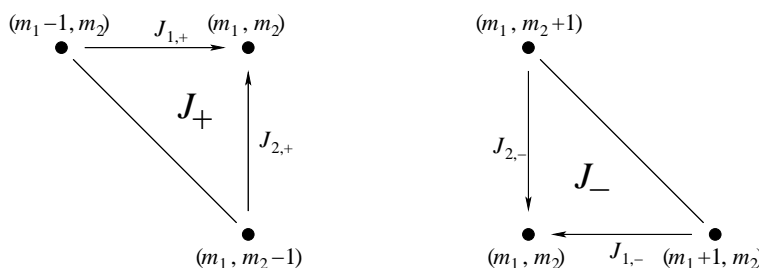
Das Bild zeigt für  $j_1 = 6$  und  $j_2 = 4$  die  $(m_1, m_2)$ -Ebene mit dem Gebiet aller möglichen magnetischen Quantenzahlen (das gestrichelte Rechteck). Darin eingezeichnet ist das kleinere Gebiet (das gestrichelte Sechseck), in dem die magnetischen Quantenzahlen für die irreduzible  $j = 5$  Darstellung der Drehgruppe liegen müssen. Die diagonalen Linien sind genau die, für die die Summe der magnetischen Quantenzahlen konstant ist, d.h.  $m_1 + m_2 = m = const.$  Durch Abzählen kann man sich ferner davon überzeugen, dass  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$  sein muss.

Wir bemerken noch, dass für halbzahligen Drehimpuls die Punkte in der  $(m_1, m_2)$ -Ebene natürlich ebenfalls halbzahlig sind. Das Gitter der magnetischen Quantenzahlen ist dann verschoben, so dass der Ursprung nicht mehr ein Gitterpunkt ist.

**Rekursionsbeziehung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten.** Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten erfüllen zwei einfache Rekursionsbeziehungen, nämlich:

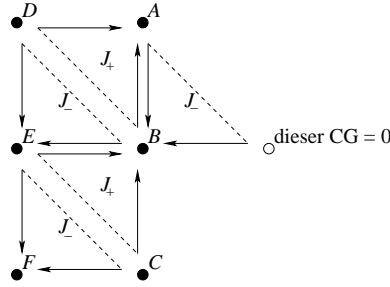
$$\begin{aligned} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2; j, m \pm 1 \rangle &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1, m_1 \mp 1, j_2 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 m_1 j_2, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; j m \rangle, \end{aligned}$$

wobei hier die Bedingung  $m_1 + m_2 = m \pm 1$  gilt. Graphisch operieren diese Rekursionsbeziehungen wie folgt in der  $(m_1, m_2)$ -Ebene:



Der entscheidende Punkt ist, diese Relationen so anzuwenden, dass einer der drei involvierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten verschwindet. Dies ist zum Beispiel an den Eckpunkten der Fall. In der ersten Figur ist z.B. der Punkt A ein solcher Eckpunkt, wenn man die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für  $j = 5$  ausrechnen will. An diesem

Eckpunkt gilt nämlich gerade  $m_1 + m_2 = j = 5$  mit  $m_1 = 6$  und  $m_2 = -1$ . Dies ist der maximal mögliche Wert für  $m_1$ , so dass es keinen Punkt rechts von der durch  $A$  gehenden Linie  $m_1 = 6$  geben kann.



In diesem Bild kann also durch die  $J_-$  Relation der Clebsch-Gordan-Koeffizient  $B$  durch  $A$  ausgedrückt werden. Mit der  $J_+$  Relation kann dann  $D$  durch  $B$  und  $A$ , also allein durch  $A$  ausgedrückt werden. Mit  $J_-$  erhalten wir dann  $E$  als Funktion von  $A$ , mit  $J_+$  dann  $C$  und mit einer weiteren  $J_-$  Relation  $F$ . Dies läßt sich so lange weitertreiben, bis man an einen Rand kommt, wo der entsprechende Clebsch-Gordan-Koeffizient verschwinden muss.

**Explizite Formel für Drehmatrizen.** Als kleines Bonbon sei hier noch kurz skizziert, wie man mit Hilfe von Schwinger's Darstellung der Drehimpulsalgebra durch zwei harmonische Oszillatoren ganz einfach die Matricelemente der  $SO(3)$  Drehmatrizen in beliebigen irreduziblen Darstellungen erhalten kann. Eine Drehung wird durch drei Eulerwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  beschrieben, wobei in einem kartesischem Koordinatensystem mit Achsen  $x, y, z$  eine solche Drehung gegeben ist als  $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)$ . Gestrichene Größen beziehen sich auf die bereits gedrehten Achsen. Man beachte unsere Konvention, dass wir die zweite Drehung um die  $y'$ -Achse vornehmen. In der theoretischen Mechanik wird meist die  $x'$ -Achse verwendet, aber mit den in der Quantenmechanik üblichen Konventionen ist unsere Wahl besser. Man kann nämlich zeigen, dass in der Quantenmechanik (mit der speziellen Bedeutung der  $z$ -Achse etc.) die Euler-Drehung auch vollständig in dem *ungedrehten* Achsensystem ausgedrückt werden kann, nämlich  $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$ . Da Drehungen um die  $z$ -Achse diagonal operieren, ist also die einzige nicht-triviale Drehung die um die  $y$ -Achse. Zwei Darstellungen kennen wir bereits gut aus QM I:

$$\rho^{(j=1/2)}(R_y(\beta)) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix},$$

$$\rho^{(j=1)}(R_y(\beta)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \frac{1}{2}(1 + \cos \beta) \end{pmatrix}.$$

Es ist allerdings ziemlich schwierig, solche Matrizen für größere  $j$  direkt auszurechnen.

Um also die Darstellung  $\rho(R) = \exp(-\frac{i}{\hbar}J_y\beta)$  für ein gegebenes  $j$  zu erhalten, nutzen wir Schwinger's Realisierung der Drehimpulsalgebra.

$$\rho(R)|j, m\rangle = \frac{(\rho(R)a_+^\dagger \rho^{-1}(R))^{j+m} (\rho(R)a_-^\dagger \rho^{-1}(R))^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \rho(R)|0\rangle. \quad (1)$$

Die Wirkung von  $\rho(R)$  auf  $|0\rangle$  ist natürlich trivial, und sonst benötigen wir nur noch

$$\rho(R)a_\pm^\dagger \rho^{-1}(R) = \exp(-\frac{i}{\hbar}J_y\beta)a_\pm^\dagger \exp(\frac{i}{\hbar}J_y\beta) = a_\pm^\dagger \cos(\beta/2) \pm a_\mp^\dagger \sin(\beta/2),$$

was sich leicht mit der *Campbell-Baker-Hausdorff-Formel* ausrechnen läßt. Einsetzen in (1) liefert

$$\rho(R)|j, m\rangle = \sum_{k,l} \binom{j+m}{k} \binom{j-m}{l} \frac{(a_+^\dagger \cos(\beta/2))^{j+m-k} (a_-^\dagger \sin(\beta/2))^k (-a_+^\dagger \sin(\beta/2))^{j-m-l} (a_-^\dagger \cos(\beta/2))^l}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0\rangle.$$

Um nun zu den gesuchten Matricelementen zu gelangen, muss man nun nur noch dieses Resultat mit der Entwicklung

$$\begin{aligned} \rho(R)|j, m\rangle &= \sum_{m'} |j, m'\rangle \rho_{m'm}^{(j)}(R) \\ &= \sum_{m'} \rho_{m'm}^{(j)}(R) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} |0\rangle \end{aligned}$$

vergleichen, wobei man die Koeffizienten gleicher Potenzen in den  $a_{\pm}^{\pm}$  betrachtet. Genauer gesagt, setzt man den Koeffizienten des Terms vom Grade  $j + m$  in  $a_{+}^{\pm}$  in der oberen Gleichung mit dem Koeffizienten zum Term der Ordnung  $2j - k - l$  in der unteren Gleichung in Beziehung, man indentifiziert also  $l = j - k - m'$ . Damit bestimmt man die  $\rho_{m'm}^{(j)}$  für festgehaltenes  $m'$ . In diesem Fall sind aber die Summen über  $k$  und  $l$  in der oberen Gleichung nicht unabhängig voneinander. Mit dem gerade Gesagten läßt sich  $l$  eliminieren. Erfreulicherweise sind dann auch automatisch die Potenzen von  $a_{\pm}^{\pm}$  gleich. Schließlich muss man nur noch die Potenzen von  $\cos(\beta/2)$ ,  $\sin(\beta/2)$  und dem Vorzeichen korrekt auseinandersortieren. Es muss also  $j + m - k + l = 2j - 2k + m + m'$ ,  $k + j - m - l = 2k - m + m'$  und  $j - m - l = k - m + m'$  sein, wobei man auch hier  $l$  wieder eliminieren kann. Man erhält nach einer nicht allzu schwierigen Rechnung *Wigner's* Formel für die Matrixelemente von  $SO(3)$  Drehmatrizen in der irreduziblen Spin- $j$  Darstellung,

$$\begin{aligned} \rho_{m'm}^{(j)}(R) &= \sum_k (-)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-k-m')!(k-m+m')!} \\ &\times (\cos(\beta/2))^{2j-2k+m-m'} (\sin(\beta/2))^{2k-m+m'}, \end{aligned}$$

wobei die Summe über  $k$  über alle Zahlen erstreckt wird, für die keines der Argumente für die Fakultäten im Nenner negativ wird.

**Bemerkung zu den Euler-Drehungen.** Wie oben gesagt wurde, verwendet man in der Quantenmechanik praktischer Weise eine andere Konvention für die Definition einer Drehung durch drei Euler-Winkel, als in der klassischen Mechanik, nämlich  $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z'}(\alpha)R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)$ . Dies ist deshalb vorteilhaft, weil man typischerweise, bei vorgegebener  $z$ -Richtung, einen einfachen Ausdruck für z.B. den Spinoperator  $\mathbf{S}$  im festen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  hat, aber nicht für das bewegte Koordinatensystem des Körpers,  $(x', y', z')$ . Es ist daher sinnvoll, die Drehungen um die Körperachsen durch solche um die festen Achsen des von außen, z.B. durch ein äußeres Magnetfeld, vorgegebenen Koordinatensystems  $(x, y, z)$  auszudrücken. Glücklicherweise gilt

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha). \quad (2)$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist einfach: eine Drehung um den Winkel  $\beta$  um die Körperachse  $y'$  erhält man auch, indem man die  $y'$ -Achse zunächst durch die inverse Drehung um den Winkel  $-\alpha$  um die  $z$ -Achse wieder auf die ursprüngliche  $y$ -Achse bringt, dann um diese ursprüngliche  $y$ -Achse um den Winkel  $\beta$  dreht, und schließlich um die *ursprüngliche*  $z$ -Achse wieder um  $\alpha$  dreht. Man beachte, dass auch bei der letzten Drehung nicht um die Körperachse  $z'$  gedreht wird!

Die Behauptung, dass die Drehungen in (2) äquivalent sind, wollen wir hier kurz plausibel machen. Dazu mache man sich klar, dass die Orientierung der  $y$ -Körperachse in beiden Fällen die gleiche ist, nämlich in  $y'$ -Richtung. Desweiteren stimmt auch die Orientierung der  $z$ -Körperachse überein: in beiden Fällen schließt nämlich die  $z$ -Körperachse den Polarwinkel  $\beta$  mit der festen  $z$ -Achse ein, während der Azimuthal-Winkel, gemessen im festen Koordinatensystem, gerade  $\alpha$  ist. Auf ähnliche Weise kann man sich klar machen, dass

$$R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta)$$

ist. Da wir die Drehung  $R_{y'}(\beta)$  aber schon in (2) durch Drehungen um Achsen des festen Koordinatensystems ausgedrückt haben, erhalten wir offenbar

$$\begin{aligned} R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) &= \underbrace{R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta)}_{R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)}R_z(\alpha)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Tatsache benutzt wurde, dass  $R_z(\alpha)$  und  $R_z(\gamma)$  kommutieren. Damit haben wir eine Drehung, gegeben durch drei Eulerwinkel, durch Drehungen um die Achsen des festen Koordinatensystems ausgedrückt. In der hier gewählten Konvention sind die Matrixelemente der Drehmatrizen  $R(\alpha = 0, \beta, \gamma = 0)$  rein reell, da in der Quantenmechanik üblicherweise die Matrixelemente von  $S_y$  bzw.  $J_y$  rein imaginär gewählt werden. Dies motiviert die Wahl der  $y$ -Achse statt der  $x$ -Achse, die in der klass. Mechanik meist verwendet wird.