STRUKTURKONSTANTEN

Die gesamte (lokale) Information über eine Lie-Gruppe G ist in den *Strukturkonstanten* ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ enthalten. Der entscheidende Punkt ist nicht, dass die Lie-Klammer zweier Generatoren als Linearkombination von Basiselementen der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, aufgefasst als Vektorraum, geschrieben werden kann, sondern dass die Koeffizienten konstant gewählt werden können. Im folgenden Abschnitt verwenden wir die Physiker-Konvention, die Generatoren hermitesch zu wählen, d.h. $X^\dagger = X$. In der Mathematik ist hingegen meist die Konvention gebräuchlich, die Generatoren anti-hermitesch zu wählen, d.h. $X^\dagger = -X$.

Strukturkonstanten. Sei X_a, $a = 1, \ldots, \dim G = \dim\mathfrak{g}$ eine beliebige Vektorraumbasis von $\mathfrak{g}$. Dann gibt es einen Satz von Strukturkonstanten f^c_{ab}, der wie folgt definiert ist:

$$[X_a, X_b] = f_{ab}{}^c X_c\,,$$

mit "Einsteinscher Summenkonvention´´ für Paare von Indices, von denen jeweils einer oben und einer unten steht.

Eigenschaften. Die Lie-Klammer ist per definitionem antisymmetrisch und erfüllt die Jacobi-Identität. Daraus folgt unmittelbar, dass für die Strukturkonstanten gilt:

$$\begin{aligned} f_{ab}{}^c &= -f_{ba}{}^c\,, \\ f_{bc}{}^d f_{ad}{}^e + f_{ca}{}^d f_{bd}{}^e + f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e &= 0\,. \end{aligned}$$

Zum Beispiel gilt für $\mathfrak{su}(2)$ mit $\sigma_a\sigma_b = \mathbb{1}\delta_{ab} + \mathrm{i}\sum_c \varepsilon_{abc}\sigma_c$ und $X_a = \frac{1}{2}\sigma_a$, dass $[X_a, X_b] = \mathrm{i}\sum_c \varepsilon_{abc}X_c$.

Adjungierte Darstellung. Sei $\dim\mathfrak{g} = n$, d.h. wir haben n Generatoren. Es seien die Matrizen

$$(T_a)_b{}^c = -\mathrm{i}f_{ab}{}^c$$

definiert. Diese Matrizen formen eine Matrix-Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf sich selbst (als Vektorraum). Damit haben wir eine explizite Realisierung von $\mathrm{ad}(X) = [X, \cdot]$ in $\mathfrak{g}$. Man rechnet leicht nach, dass in der Tat $[T_a, T_b] = \mathrm{i}f_{ab}{}^c T_c$ ist.

Killing-Form. Man kann aus den Strukturkonstanten einen symmetrischen Tensor (zweiter Stufe) bilden, die sogenannte *Cartan-Killing-Metrik* oder *Killing-Form*. Diese ist definiert als

$$g_{ab} = f_{ac}{}^d f_{bd}{}^c = -\mathrm{tr}(T_a T_a)\,,$$

wobei das Vorzeichen in der letzten Gleichung von der Physiker-Konvention herrührt. Diese Form kann als Metrik im Vektorraum $\mathfrak{g}$ angesehen werden, und erlaubt das Herauf- und Herunterziehen von Indices. Insbesondere gilt, dass die Größen $f_{abc} = f_{ab}{}^d g_{dc}$ total anti-symmetrisch sind.

GROBE KLASSIFIKATION

Es folgen einige einfache Definitionen, die es erlauben, Lie-Algebren ganz grob zu klassifizieren. Diese Definitionen lehnen sich an unser Vorgehen zur Behandlung endlicher Gruppen an.

Invariante Unteralgebra. Eine Algebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt *invariante Unteralgebra* genau dann wenn $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})(\cdot) \subset \mathfrak{h}$, d.h.

$$\forall X \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{g} : [X, Y] \in \mathfrak{h}\,.$$

Für den Mathematiker ist eine invariante Unteralgebren ein *Ideal*. Dies entspricht bei endlichen Gruppen den normalen Untergruppen. Man beachte, dass natürlich auf der rechten Seite null explizit erlaubt ist.

Einfache Lie-Algebren. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die keine echte invariante Unteralgebra besitzt, heißt *einfach* (engl. *simple*). Insbesondere ist $\mathfrak{u}(1)$ keine einfache Lie-Algebra. Man kann sich klar machen, dass die zugehörige zusammenhängende Lie-Gruppe einer einfachen Lie-Algebra nicht in Untergruppen faktorisiert.

Abelsche invariante Unteralgebra. Ein spezieller Fall ist es, wenn $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ eine *abelsche* invariante Unteralgebra ist, d.h.

$$\forall X \in \mathfrak{a}, \forall Y \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0\,.$$

Es folgt, dass mit $\dim\mathfrak{a} = n$ und $\dim\mathfrak{g} = d$ die zugehörige Lie-Gruppe G faktorisiert in $G = G' \times U(1)^n$, wobei dann $\dim G' = d - n$ ist. Da offensichtlich für $X_a \in \mathfrak{a}$ gilt, dass $f_{ab}{}^c = 0$ für alle b, c ist, muss die Killing-Form für jeden $U(1)$-Faktor einen Null-Eigenwert besitzen. Insbesondere ist $\det g_{ab} = 0$.

Halbeinfache Lie-Algebren. Eine Lie-Algebra, die keine echte abelsche i invariante Unteralgbra besitzt, heißt *halbeinfach* (engl. *semi-simple*). Äquivalent ist dazu die Bedingung, dass die Determinante der Killing-Form nicht verschwindet.

Untere zentrale Reihe. Man definiert sukzessive Derivationen einer Lie-Algbera $\mathfrak{g}$, die sogenannte *untere zentrale Reihe* (engl. *lower central series*) wie folgt: $\mathcal{D}_1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, und weiter $\mathcal{D}_k\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{D}_{k-1}\mathfrak{g}]$.

Abgeleitete Reihe. Man definiert sukzessive rekursive Derivationen einer Lie-Algbera $\mathfrak{g}$, die sogenannte *abgeleitete Reieh* (engl. *derived series*) wie folgt: $\mathcal{D}^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, und weiter $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}, \mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}]$. Man beachte, dass $\mathcal{D}^1\mathfrak{g} = \mathcal{D}_1\mathfrak{g} \equiv \mathcal{D}\mathfrak{g}$ ist.

Nilpotente Lie-Algbera. Eine Lie-Algbera $\mathfrak{g}$ heißt *nilpotent* genau dann wenn es ein k gibt, so dass $\mathcal{D}_k\mathfrak{g} = 0$. Ein Beispiel sind die strikten oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonale also identisch null ist. Seien die strikten oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ betrachtet. Dann ist $\mathfrak{n}_1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ die Algebra der oberen Dreiecksmatrizen mit verschwindender Haupt- und erster Nebendiagonale, $\mathfrak{n}_2 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1]$ die Algebra der oberen Dreiecksmatrizen mit verschwindender Haupt-, erster und zweiter Nebendiagonale etc. Insbesondere ist $\mathfrak{n}_n = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_{n-1}] = \mathcal{D}_n\mathfrak{n} = 0$.

Auflösbare Lie-Algebra. Eine Lie-Algbera $\mathfrak{g}$ heißt *auflösbar* (engl. *solvable*) genau dann wenn es ein k gibt, so dass $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = 0$. Ein Beispiel sind die oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. Es gilt $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$ und $\mathcal{D}^k\mathfrak{b} = \mathfrak{n}_{2^{k-1}}$. Es gibt also ein k, für das $\mathcal{D}^k\mathfrak{b} = 0$ wird. Die obige Definition einer halb-einfachen Lie-Algebra ist äquivalent zu der Definition, dass $\mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach ist, wenn es kein Ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ gibt, das auflösbar ist. Weiter ist zu bemerken, dass die Eigenschaften Nilpotenz bzw. Auflösbarkeit einer Lie-Algebra auch für alle ihre Unteralgebren gelten.

Perfekte Lie-Algebra. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *perfekt* genau dann wenn $\mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ ist. Es gilt, dass jede halbeinfache Lie-Algebra perfekt ist.

Satz von Engel. Sei $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ so, dass für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt, dass X auf V ein nilpotenter Endomorphismus ist. Dann existiert ein $v \in V, v \neq 0$, so dass für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt, dass $Xv = 0$. Eine Konsequenz von Engel's Theorem ist, dass es eine Basis in V gibt, so dass die entsprechende Matrix-Darstellung für jedes $X \in \mathfrak{g}$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

BEWEISSKIZZE: Man macht sich klar, dass für ein nilpotentes Element $X \in \mathfrak{gl}(V)$ auch die adjungierte Operation $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ nilpotent ist. Der Beweis wird erfolgt durch Induktion über die Dimension von $\mathfrak{g}$. Mit der Induktionshypothese zeigt man, dass $\mathfrak{g}$ ein Ideal $\mathfrak{h}$ der Kodimension eins enthält, wozu man die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ betrachtet. Da $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra ist, bildet die adjungierte Darstellung den Vektorraum $\mathfrak{h}i \subset \mathfrak{g}$ in sich ab, und operiert damit auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Für jedes $X \in \mathfrak{h}$ operiert $\mathrm{ad}(X)$ nilpotent auf $\mathfrak{gl}(V)$, damit auf $\mathfrak{g}$ und damit auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Die Induktion liefert demnach ein Element $\bar{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\bar{Y} \neq 0$, das von $\mathrm{ad}(X)$ für alle $X \in \mathfrak{h}$ annihiliert wird. Damit gibt es auch ein Element $Y \in \mathfrak{g}$, $Y \notin \mathfrak{h}$, so dass $\mathrm{ad}(X)(Y) \in \mathfrak{h}$ für alle $X \in \mathfrak{h}$. Also ist der Unterraum $\mathfrak{h}'$, der von $\mathfrak{h}$ und Y aufgespannt wird, eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ als Ideal der Kodimension eins enthält. Da $\mathfrak{h}$ bereits eine maximale echte Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist folgt, dass $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}$. Betrachtet man nun die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V, wendet man die Induktionshypothese auf $\mathfrak{h}$ an. Es gibt also einen Unterraum $W \subset V$, $W \neq 0$, dessen Vektoren w sämtliche von allen Elementen $X \in \mathfrak{h}$ annihiliert werden. Sei nun Y ein Element von $\mathfrak{g}$, das nicht in $\mathfrak{h}$ liegt. Da Y und $\mathfrak{h}$ ganz $\mathfrak{g}$ aufspannen, genügt es zu zeigen, dass es einen Vektor $v \in W$ gibt, so dass $Y(v) = 0$. Nun gilt aber für jedes $w \in W$ und jedes $X \in \mathfrak{h}$, dass $X(Y(w)) = Y(X(w)) + [X, Y](w)$. Mit $X(w) = 0$ nach Voraussetzung, $[X, Y] = \mathrm{ad}(X, Y) = Z \in \mathfrak{h}$, also $Z(w) = 0$ nach Voraussetzung, ist also $X(Y(w)) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{h}$, also $Y(w) \in W$. Also bildet die Aktion von Y auf V den Unterraum W in sich ab. Da Y nilpotent auf V operiert, existiert also ein Vektor $v \in W$, so dass $Y(v) = 0$. □

Satz von Lie. Sei $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine komplexe auflösbare Lie-Algbera. Dann existiert ein $v \in V, v \neq 0$, so dass v ein Eigenvektor von X für alle $X \in \mathfrak{g}$ ist, d.h. für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt, dass $Xv = \lambda_X v, \lambda_X \in \mathbb{C}$. Eine Konsequenz von Lie's Theorem ist, dass es eine Basis in V gibt, so dass die entsprechende Matrix-Darstellung für jedes $X \in \mathfrak{g}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Das bedeutet, dass jede Darstellung einer auflösbaren Lie-Gruppe in obere Dreiecksform gebracht werden kann.

BEWEISSKIZZE: Der Beweis funktioniert ähnlich wie der von Engel's Theorem. Für eine auflösbare Lie-Algebra ist $\mathcal{D}\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}$. Der Quotient $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/\mathcal{D}\mathfrak{g} \neq 0$ ist eine abelsche Lie-Algebra. Das Urbild $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ eines jeden Unterraumes von $\mathfrak{a}$ der Kodimension eins ist dann ein Ideal der Kodimension eins in $\mathfrak{g}$. Man nimmt nun als Induktionshypothese an, dass es einen Vektor $v_0 \in V$ gibt, der Eigenvektor für alle $X \in \mathfrak{h}$ ist. Die jeweiligen Eigenwerte seien mit λ_X bezeichnet. Man betrachtet den Unterraum $W \subset V$ aller Vektoren mit dem gleichen Satz simultaner Eigenwerte, d.h. $W = \{v \in V : X(v) = \lambda_X v \, \forall X \in \mathfrak{h}\}$. Sei wieder $Y \in \mathfrak{g}$ ein beliebiges Element nicht in $\mathfrak{h}$. Es genügt wieder zu zeigen, dass es einen Vektor $v \in W$ gibt, der von Y auf ein Vielfaches von sich abgebildet wird. Dazu reicht es wieder zu zeigen, dass Y den Raum W in sich abbildet. Dies folgt aus dem folgenden allgemeinen Lemma:

LEMMA: Sei $\mathfrak{h}$ ein Ideal einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$, und $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ eine lineare Funktion. Sei $W = \{v \in V : X(v) = \lambda(X)v \; \forall X \in \mathfrak{h}\}$. Dann ist $Y(W) \subset W$ für alle $Y \in \mathfrak{g}$.

BEWEISSKIZZE FÜR LEMMA: Man betrachtet für ein $w \in W$, $w \neq 0$, einfach $X(Y(w)) = Y(X(w)) + [X,Y](w) = \lambda(X)Y(w) + \lambda([X,Y])w$, wobei die letzte Gleichung aus $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ folgt. Zu zeigen ist also, dass $\lambda([X,Y]) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{h}$. Um dies einzusehen, führt man einen weitern Unterraum von V ein, nämlich $U = \mathrm{span}\{w, Y(w), Y^2(w), \ldots\}$. Diesr Unterraum wird nach Lonstruktion von Y in sich abgebildet. Man überzeugt sich nun leicht davon, dass jedes $X \in \mathfrak{h}$ ebenfalls U in sich abbildet: In der Tat bildet $\mathfrak{h}$ den Vektor w auf Vielfaches von sich ab, also in U. Aus obiger Gleichung folgt, dass $\mathfrak{h}$ den Vektor $Y(w)$ in eine Linerakombination von w und $Y(w)$ abbildet, also in U. Durch Induktion folgt dann, dass $\mathfrak{h}$ den Vektor $Y^k(w)$ ebenfalls in U abbildet, da $X(Y^k(w)) = Y(X(Y^{k-1}(w))) + [X,Y](Y^{k-1}(w))$ für jedes $X \in \mathfrak{h}$. Da $X(Y^{k-1}(w)) \in U$ nach Induktionshypothese, und $[X,Y] \in \mathfrak{h}$, folgt die Behauptung. Bemerkung: In der Basis $w, Y(w), Y^2(w), \ldots$ für U ist die Operation von jedem $X \in \mathfrak{h}$ durch eine obere Dreiecksmatrix gegeben, deren Diagonalelemente alle gleich $\lambda(X)$ sind. Insbesondere ist $\mathrm{tr}_U X = \lambda(X)\mathrm{dim}U$. Auf der anderen Seite operiert auch der Kommutator $[X,Y]$ auf U. Nun ist automatisch $\mathrm{tr}_U[X,Y] = 0$, so dass $\lambda([X,Y]) = 0$ sein muss. □

Vollständige Reduzierbarkeit. Halbeinfache Lie-Algebren haben viele Eigenschaften eindlicher Gruppen. So gilt zum Beispiel ganz analog zu den endlichen Gruppen, dass für jede Darstellung V eine halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und für jeden unter der Aktion von $\mathfrak{g}$ invarianten Unterraum $W \subset V$ ein Unterraum $W' \subset V$ existiert, der komplementär zu W und invariant unter $\mathfrak{g}$ ist.

Erhalt der Jordan-Zerlegung. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra. Die Jordan-Zerlegung eines Elementes $X \in \mathfrak{g}$ ist eine Zerlegung der Form $X = X_s + X_n$, wobei $[X_s, X_n] = 0$, X_s diagonalisierbar, und X_n nilpotent ist. Weiter gilt, dass X_s und X_n als Polynome in X ausgedrückt werden können. Es gilt nun, dass sich diese Zerlegung auf jede Darstellung von $\mathfrak{g}$ vererbt, d.h. für jede Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ hat man $\rho(X)_s = \rho(X_s)$ und $\rho(X)_n = \rho(X_n)$. Anders ausgedrückt, sieht man ρ als injektiv und damit $\mathfrak{g}$ als Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ an, dann sind die diagonalisierbaren und nilpotenten Anteile eines jedenm $X \in \mathfrak{g}$ wieder in $\mathfrak{g}$ und sind unabhängig von der speziellen Darstellung ρ.

Der Unitaritäts-Trick von Hermann Weyl. Die beiden letzten Theoreme über vollständige Reduzierbarkeit und Erhalt der Jordan-Zerlegung kann man sehr elegant mit einem Trick von Hermann Weyl beweisen, bei dem man einen Umweg über die Darstellungen kompakter Lie-Gruppen geht. Dies soll im folgenden ganz kurz skizziert werden.

KOMPAKTE LIE-GRUPPE: Die Behauptungen lassen sich für kompakte Lie-Gruppen leicht einsehen. Vollständige Reuzierbarkeit zeigt man ganz analog zum Fall der endlichen Gruppen: Wenn die kompakte Gruppe G auf einem Vektorraum V operiert, so kann man eine hermitesche Metrik auf V konstruieren, die invariant unter der Aktion von G ist, indem man eine beliebige Metrik wählt und über alle ihre Bilder unter der Aktion von G mittelt. (Bei den endlichen Gruppen waren das Summen, jetzt hat man natürlich Integrale. Der Punkt ist, dass kompakte Gruppen endliches Volumen haben, so dass diese Integrale existieren.) Wenn nun G einen Unterraum $W \subset V$ invariant läßt, so läßt G dessen orthogonales Komplement $W^\perp$ bezüglich dieser invarianten Metrik invariant. In ähnlicher Weise zeigt man den Erhalt der Jordan-Zerlegung.

DER UMWEG: Man macht nun von folgendem Sachverhalt Gebrauch: Zu jeder komplexen halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ existiert eine (eindeutige) reele Lie-Algbera $\mathfrak{g}_0$ mit Komplexifizierung $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}$. Diese reelle Lie-Algebra hat die schöne Eigenschaft, dass die einfach zusammenhängende Lie-Gruppe G zu $\mathfrak{g}_0$ eine kompakte Lie-Gruppe ist. Schränkt man eine gegebene Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{g}_0$ ein, so kann man die Exponential-Abbildung verwenden um eine Darstellung von G zu erhalten, für die vollständige Reduzierbarkeit gilt. Aus dieser kann man dann die vollständige Reduzierbarkeit der ursprünglichen Darstellung folgern.

BEISPIEL: Zur Verdeutlichung betrachten wir einaml die Lie-Gruppe $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$. Es ist sicherlich nicht wahr, dass jede Darstellung ρ von $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ auf einem Vektorraum V eine hermitesche Metrik zuläßt. Wir können aber trotzdem folgendes tun: Wir können
(1) die Darstellung ρ' die zugehörige (komplexe) Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ sein lassen,
(2) die Darstellung ρ' von $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ zu einer Darstellung ρ'' von $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ erweitern,
(3) die Darstellung ρ'' auf eine Darstellung ρ''' von $\mathfrak{su}_n \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ einschränken,
(4) die Darstellung ρ''' exponenzieren, um ein Darstellung ρ'''' der unitären Gruppe SU_n zu erhalten.
Damit können wir nun wie folgt argumentieren: Ist $W \subset V$ ein Unterraum invariant unter der Aktion von $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$, so muß W invariant unter $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ sein wegen (1), so muß W invariant unter $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$ sein wegen (2), so muß W invariant unter $\mathfrak{su}_n$ sein wegen (3), so muß W invariant unter SU_n sein wegen (4).
Da SU_n kompakt ist, existiert also ein komplementärer Unterraum W', der invariant under SU_n ist. Gehen wir den Weg zurück, so folgern wir, dass W' invariant ist unter $\mathfrak{su}_n$, damit invariant ist unter $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \mathfrak{su}_n \otimes \mathbb{C}$, damit invariant ist unter $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ durch Einschränkung, damit invariant ist unter $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ durch exponenzieren.
Will man zeigen, dass die diagonalen Elemente von $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ in jeder Darstellung halbeinfach operieren, bzw. dass

äquivalent dazu die diagonalen Elemente von $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ halbeinfach operieren, so geht man durch die selbe Prozedur, um zu der Tatsache zu gelangen, dass die Gruppe der diagonalen Elemente in $\mathfrak{su}_n$ abelsch und kompakt ist.
Generell gilt, dass Theoreme über die endlich-dimensionalen Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren auf zwei Arten bewiesen werden können: Einmal rein algebraisch unter Ausnutzen allein der Struktur der Lie-Algebra, oder zum anderen mit dem Unitaritäts-Trick, d.h. indem man zu einer Darstellung einer solchen Lie-Algebra eine Darstellung einer kompackten Lie-Gruppe assoziiert.

Einfache Lie-Algebren. Hat man sich durch die Theorie von Lie-Algebren gearbeitet, kommt man schliesslich bei folgendem Theorem an, das hier sozusagen als Zielmarke angegeben sei: Bis auf fünf Ausnahmen ist jede einfache komplexe Lie-Algebra isomorph zu entweder $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$, oder $\mathfrak{so}_n\mathbb{C}$, oder $\mathfrak{sp}_n\mathbb{C}$ für ein n. Dies sind die Lie-Algebren der sogenannten *klassischen Lie-Gruppen*, wobei für $\mathfrak{so}_n\mathbb{C}$ die Beschränkung $n > 2$ gilt. Die fünf Ausnahmen heißen $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$ und $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$. Dies sind die Lie-Algebren der sogenannten *exzeptionalen Lie-Gruppen*.

Ein-dimensionale Lie-Algebren. Jede ein-dimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist natürlich abelsch, d.h. $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ mit allen Lie-Klammern gleich null. Die zugehörige einfach zusammenhängende Lie-Gruppe ist ebenfalls $\mathbb{C}$ mit Addition als Gruppengesetz. Andere zusammenhängende Lie-Gruppen müssen Quotienten von $\mathbb{C}$ über einer diskreten Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{C}$ sein. Ist der Rang von Λ eins, so ist der Quotient einfach $\mathbb{C}^*$ mit Multiplikation als Gruppengesetz. Hat Λ Rang zwei, so ist die Lie-Gruppe Element einer kontinuierlich variierenden Familie von komplexen Tori der Dimension eins (oder Riemannsche Flächen vom Geschlecht eins, oder elliptische Kurven über $\mathbb{C}$). Über $\mathbb{R}$ ist die Situation noch einfacher. Die einzige reelle ein-dimensionale Lie-Algebra ist $\mathbb{R}$ mit trivialen Lie-Klammern. Die einfach zusammenhängende Lie-Gruppe ist wieder $\mathbb{R}$ mit Addition als Gruppengesetz. Die einzige zusammenhängende andere reelle Lie-Gruppe mit dieser Lie-Algebra ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

Zwei-dimensionale Lie-Algebren. Entweder ist $\mathfrak{g}$ abelsch oder nicht. Im abelschen Fall hat man $\mathbb{C}^2$ als einfach zusammenhängende Lie-Gruppe, und andere zusammenhängende Lie-Gruppen sind Quotienten davon mit diskreten Untergruppen. Eine diskrete Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ ist ein Gitter vom Range eins, zwei, drei, oder vier. Ist der Rang eins, so ist $G \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Ist der Rang zwei, so ist entweder $G \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, oder $G \cong E \times \mathbb{C}$, E ein komplexer Torus wie oben. Dies hängt davon ab, ob Λ in einem ein-dimensionalen komplexen Unterraum von $\mathbb{C}^2$ liegt, oder nicht. Ist der Rang drei, so kann ein Rang zwei Untergitter innerhalb einer komplexen Geraden liegen. In diesem Fall ist $G \cong E \times \mathbb{C}^*$. Ist dies nicht der Fall, so wird es wirklich kompliziert. Man kann dann G als ein Bündel über einen Torus E mit Fasern isomorph zu $\mathbb{C}^*$ ausdrücken, jedoch ist E dann nicht mehr durch die Gruppe G eindeutig definiert. Man kann so verschiedene algebraische Gruppen erhalten, die als komplexe Lie-Gruppen alle isomorph sind. Fasst man umgekehrt G als $\mathbb{C}^*$-Bündel auf, so gibt dies G die Struktur einer algebraischen Varietät, die die elliptische Kurve E bestimmt. So ergeben verschiedene Realisierungen von G als $\mathbb{C}^*$-Bündel nicht-isomorphe algebraische Gruppen. Ist schließioch der Rang vier, ist alles total mysteriös, und die Menge der zwei-dimensionalen komplexen Tori ist noch lange nicht vollständig verstanden. Einigermassen im Griff hat man die abelschen Varietäten, und für polarisierte abelsche Varietäten aht man gar eine recht gut Modul-Theory. Leider ist die Menge der abelschen Varietäten nur eine abzählbare dichte Teilmenge in der Menge aller komplexen Tori. Der relle Fall ist dafür wieder viel einfacher und vollständig klar. Die einfach zusammenhängende Gruppe ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und jede andere zusammenhängende abelsche reelle Lie-Gruppe ist entweder $\mathbb{R} \times S^1$ oder $S^1 \times S^1$.
Sei nun $\mathfrak{g}$ nicht abelsch. Die Lie-Klammer ist eine lienare Abbildung $\bigwedge^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Ist diese Abbildung ungleich null, so ist ihr Bild ein-dimensional. Sei nun eine Basis X, Y von $\mathfrak{g}$ so gewählt, dass X das ein-dimensionale Bild unter der Lie-Klammer aufspannt. Da wir Y beliebig normieren können, kann die Lie-Klammer auf die Form $[X, Y] = X$ gebracht werden, was $\mathfrak{g}$ vollständig festlegt. Es gibt also genau eine nicht-abelsche zwei-dimensionale Lie-Algebra sowohl über $\mathbb{R}$ wie über $\mathbb{C}$. Die adjungierte Darstellung, die treu ist, hat die Form

$$\operatorname{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad}(Y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } \mathfrak{g} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{gl}_2\mathbb{C}\,.$$

Exponenzieren ergibt die adjungierte Form

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\} \subset \mathrm{GL}_2\mathbb{C}\,.$$

Topologisch ist diese Gruppe homöomorph zu $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Um die universelle Überlagerung G von G_0 zu finden schreibt man für $a = \mathrm{e}^t$, so dass das Produkt zweier Elemente von G gemäß dem Gruppengesetz $(t, b) \cdot (t', b') = (t{+}t', b{+}\mathrm{e}^t b')$ gegeben ist, wobei Gruppenelemente nun Tupel $(t, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sind. Das Zentrum von G ist natürlich einfach $Z(g) = \{(2\pi \mathrm{i} n, 0)\} \cong \mathbb{Z}$, so dass die zusammenhängenden Gruppen mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einen partial geordneten Turm $G \to \ldots \to G_n = G/n\mathbb{Z} = \{(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}; (a, b) \cdot (a', b') = (aa', b + a^n b')\} \to \ldots \to G_0$ bilden. In der Tat kann man zeigen, dass für $m \neq n$ die Gruppen G_m und G_n nicht isomorph sind. Im reellen Fall stellt man fest, dass nach Exponenzieren die Lie-Gruppe bereits einfach zusammenhängend, und damit die eindeutige zusammenhängende reelle Lie-Gruppe mit Algebra $\mathfrak{g}$ ist.