Lie-Gruppen und Lie-Algebren

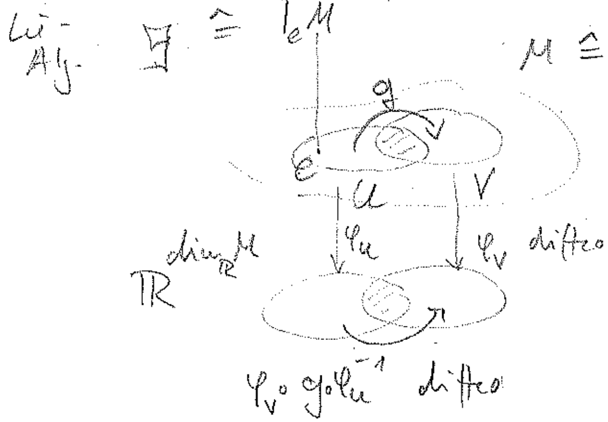
Gruppen Mannigfaltigkeiten

Noethers Theorem: zu jeder differenzierbaren Symmetrie ex. Erhaltungsgrößen und -sätze.

Bsp: Drehimpuls, Zeittranslation (Energie)

In der Mathematik führen diffbare Sym. zu der Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren. Grob gesagt ist eine Lie-Gruppe eine Gruppe deren Parameterraum eine differenzierbare Mfk ist. Die Lie-Algebra ist definiert als der am Einselement der Gruppe angeheftete Tangentialraum. Ich werde, an Beispielen, ein Stück dieses Weges mit Euch gehen.

Orientierungsplan



$M \triangleq$ Parameterraum der Gruppe G

Am Beispiel der Matrixgruppen (S)U(N) und (S)O(N) mit bes. Augenmerk auf die SO(2)

Beispiele zur Motivation

1) $\mathbb{R}$ mit der Addition ist eine Abelsche Gruppe
2) $\mathbb{R}_{>0}$ unter der Multiplikation
3) Die Menge aller komplexen Zahlen mit Betrag 1 ist eine Gruppe, $U(1)$.
4) $\mathbb{R}^n$ unter Addition $(r_1,\dots,r_n)+(r_1',\dots,r_n') = (r_1+r_1',\dots,r_n+r_n')$

Die Parameterräume aller dieser Beispiele können mit einer Struktur ausgestattet werden, die sie zu (top) Mfk. macht. Es macht also Sinn, das folgende Maß für die "Größe" von Gruppen mit überabzählbar vielen Elementen einzuführen.

Def: Die reelle Dimension einer topologischen Gruppe ist die Anzahl der reellen, (nicht diskreten) Parameter die gebraucht werden, um ein Gruppenelement zu spezifizieren.

1) $\mathbb{R}$ hat dim 1
2) $\mathbb{R}^n$ hat dim n
3) $U(1)$ hat dim 1

Obgleich $(\mathbb{R},+)$ und $(U(1),\cdot)$ dieselbe Dim. haben, sind sie topologisch verschieden

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \ni x$

Parametris. durch $\mathbb{R}$

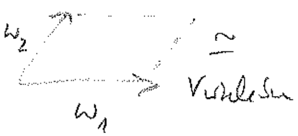
$U(1)$

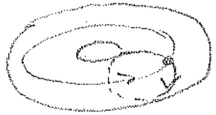
$\theta = 0 \quad 2\pi \quad 4\pi \quad \cdots$

durch $S^1 \simeq [0,2\pi)$, da $e^{i\theta+2\pi} = e^{i\theta}$

Kann man noch andere Mannigfaltigkeiten mit Gruppen in Verbindung bringen?

1) Torus





$S^1 \times S^1$

Die Produktgruppe $U(1) \times U(1)$ hat diesen Parameterraum.

2) Was ist mit der S^2

$x^2+y^2+z^2-1=0$

Dazu wird es keine Lie-Gruppe geben. Die Antwort kann ich nur heuristisch geben. Die Gruppenoperation wirkt auf den Parameterraum wie eine Verschiebung.

$g \to g'g$

Durch infinitesimale solche Verschiebungen kann man ein "Vektorfeld" auf diesem Parameterraum definieren, das nirgendwo verschwindet. Das geht bei der S^2 nicht (hairy ball theorem). Beim Torus und S^1 sehr wohl:

Tatsächlich sind die n-Sphären S^n keine Parameterräume für Lie-Gruppen. Ausnahmen sind

$$S^1 \simeq U(1)$$
$$S^3 \simeq SU(2) \simeq SO(3,\mathbb{R})$$

Nach diesen Beispielen def. ich, was ich unter einer Lie-Gruppe meine.

Def: Eine Lie-Gruppe ist eine Gruppe G, die ein Parameterraum einer differenzierbaren Mfk. ist, so dass die Gruppenoperation

$$G \times G \to G, \quad (g, g') \mapsto g g'^{-1}$$

differenzierbar ist.

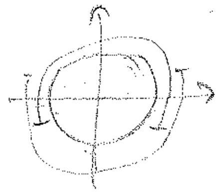
a) Die Dimension von G ist die reelle Dimension, die ich zuvor def. habe.

b) Dass $(g, g') \mapsto g g'^{-1}$ differenzierbar ist meint in den Parametern und

- differenzierbar falls es eine Karte gibt, die g, g'^{-1} und $g g'^{-1}$ enthält

Bsp:

S^1:



→ Die Koord. θ ist nicht stetig bei $\theta = 0$, so dass zwei Karten benötigt werden.

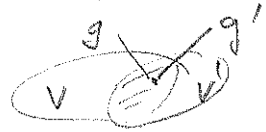
Karte ⓐ

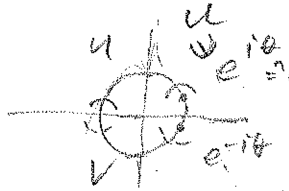
$\varphi \in -\varepsilon \cdots \pi + \varepsilon$

$e^{\frac{\pi}{2}} e^{\pi} = e^{\frac{3}{2}\pi}$ geht raus.

$e^{i\theta}$ ist differenzierbar in θ.

c) Sind g und g' verschiedene Koordinaten an einem Punkt $p \in G$, so hängen g und g' differenzierbar voneinander ab





$e^{i\theta} e^{i\varphi} \in V$

$$\underbrace{\theta \in -\varepsilon, \ldots, \pi + \varepsilon}_{U}$$

$\varphi \in \pi - \varepsilon, \ldots, \varepsilon$

$e^{i\varepsilon} \mid e^{-i\varepsilon} \in V, \; e^{\varepsilon} \in U$

$$e^{i\theta} = (e^{i\varphi} e^{-i\theta}) \cdot e^{i\theta}$$

Kartenwechsel: $e^{i\varphi}$, $e^{-i\theta}$ und $e^{i\varphi} e^{-i\theta}$ sind in V enthalten.

Beispiele für Lie-Gruppen

Sei $M(n, \mathbb{R})$ die Menge der $n \times n$ Matrizen mit reellen Komponenten. Die notwendige Bedingung für die Existenz von inversen ist $\det A = 0$, $A \in M(n, \mathbb{R})$.

a) Die Menge

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M(n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0 \}$$

ist eine Lie-Gruppe.

- $A, B \in GL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow A\cdot B \in GL(n,\mathbb{R})$
  da $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$
- $(AB)C = A(BC)$ gilt für Matrizen

$\dim_{\mathbb{R}} GL(n,\mathbb{R}) = n^2$ (Einträge in A)

Parameterraum ist $\mathbb{R}^{n^2}$.

b) $GL(n,\mathbb{C})$ mit komplexen Einträgen
Ähnlich mit $\dim_{\mathbb{R}} GL(n,\mathbb{C}) = 2n^2$

c) $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : AA^T = \mathbb{1}\}$
Das ist eine Gruppe

- $\mathbb{1}\cdot\mathbb{1}^T = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} \in O(n,\mathbb{R})$
- Falls $AA^T = 1$ & $BB^T = 1 \Rightarrow$
  $(AB)(AB)^T = ABB^TA^T = 1$

$O(n,\mathbb{R})$ heisst orthogonale Gruppe, weil folgende Relation gilt

$AA^T = 1 \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$
A^{-1} ist auch $\in O(n,\mathbb{R})$, denn
$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}A = \mathbb{1}$

$\dim_{\mathbb{R}} O(n,\mathbb{R}) = n^2 -$ Einschränkungen
Was sind die Einschränkungen?

AA^T ist symmetrisch, da $(AA^T)^T = AA^T$.
Die Bedingung $AA^T = \mathbb{1}$ legt also gerade die Anzahl an Einträgen fest, die den unabh. Einträgen einer symm. $n\times n$ Matrix entsprechen. Das sind

$\underbrace{n}_{\text{Spur}} + \underbrace{\frac{n^2-n}{2}}_{\text{Nebendiag.}} = \frac{1}{2}(n^2+n)$

Damit: $\dim_{\mathbb{R}} O(n,\mathbb{R}) = n^2 - \frac{1}{2}(n^2+n)$
$= \frac{n}{2}(n-1)$

d) $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$
Da $AA^T = 1$ gilt $\det AA^T = (\det A)^2 = 1$
und $\det A = \pm 1$ für $O(n,\mathbb{R})$.
Die Wahl $+1$ legt einen diskreten Parameter fest und schränkt die Dim nicht weiter ein.

Unitäre Gruppe $U(n)$

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : AA^\dagger = 1\}$$

Das ist eine Untergruppe der $GL(n,\mathbb{C})$

$$AA^\dagger = 1 = BB^\dagger \Rightarrow (AB)(AB)^\dagger = 1$$

$\dim_{\mathbb{R}} GL(n,\mathbb{C}) = 2n^2$ und wie eben gilt $AA^\dagger$ ist symmetrisch mit unabhängigen Elementen

$$\underbrace{2n - n}_{\text{Spur} \quad \text{Realitätsbed.}} + 2\cdot\frac{n^2-n}{2} \stackrel{!}{=} n^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim_{\mathbb{R}} U(n) = 2n^2 - n^2 = n^2}$$

$n=1 \triangleq a \in \mathbb{C}$ mit $a\bar a = 1$

$U(1)$ ist abelsch, alle anderen $n \geq 2$ sind nicht abelsch.

f) $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$

Die Situation hier ist anders als bei der $SO(n,\mathbb{R})$. Aus $AA^\dagger = 1$ folgt $\det AA^\dagger = |\det A|^2 = 1$ und $\det A = e^{\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$

Also beschränkt die Bed. $\det A = 1$ eine kontinuierlichen Parameter, der zu reellen dim. beiträgt

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} SU(n) = n^2 - 1,$$

Das Beispiel der $SU(2)$

Ich möchte nun die $SU(2)$ näher anschauen und insbesondere den Parameterraum spezifizieren.

Sei zunächst $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$.

Es gilt $AA^\dagger = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} &① \quad a\bar a + b\bar b = 1 \\ &② \quad c\bar c + d\bar d = 1 \\ &③ \quad a\bar c + b\bar d = 0 \end{aligned}}$$

Da $AA^\dagger$ symmetrisch reichen drei Bed.

Die Bed. für $SU(2)$: $\det A = +1 \Rightarrow$
④ $ad - bc = 1$

④$\cdot \bar c \Rightarrow ad\bar c - b|c|^2 = \bar c$

③ $\Rightarrow -b|d|^2 - b|c|^2 = \bar c$

② $\Rightarrow -b|d|^2 - b + b|d|^2 = \bar c \Leftrightarrow \boxed{\bar c = -b}$

in ③ $\Rightarrow \boxed{a = \bar d}$ Also ist i. A.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar b & \bar a \end{pmatrix} \text{ und } |a|^2 + |b|^2 = 1}$$

Der Parameterraum von $SU(2)$ ist also durch die Nullstellenmenge

$$|a|^2 + |b|^2 - 1 = 0$$ definiert.

In reellen Koord. $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0$$

D.h. als Mfk. $\boxed{SU(2) \simeq S^3}$

f) $SO(3,\mathbb{R})$ hat die gleiche dim wie $SU(2)$. Die Matrizen in $SO(3,\mathbb{R})$ rotieren Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Der Parameterraum besteht aus den Drehungen um drei Achsen, wird also durch drei Winkel parametrisiert.

$$\Rightarrow SO(3,\mathbb{R}) \simeq S^3$$

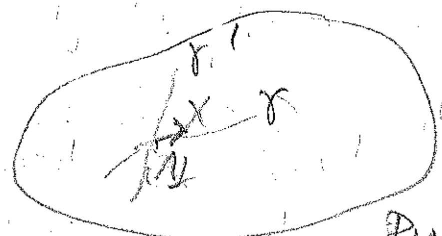
Versucht das Bild  , täuscht man, es seien nur 2 Winkel. Hier ist jedoch eine Achse ausgezeichnet und diese kann bel. gewählt werden.

Lie-Algebren

Sei G eine Lie-Gruppe. Da G eine diffbare Mfk. ist kann man darauf Vektorfelder definieren. Von besonderem Interesse ist der Tangentialraum am Punkt $\mathbb{1} \in G$, $\mathbb{1}$ ist das 1-Element. Dieser ist per def. gerade die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. An die Elemente aus $\mathfrak{g}$ kommt man so:

Sei $\gamma(t)$ eine Kurve in G mit $\gamma(0) = \mathbb{1}$. Die Tangente entlang dieser Kurve bei $\mathbb{1}$ ist

$$X[f](\mathbb{1}) := \left\{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right\}_{t=0}$$



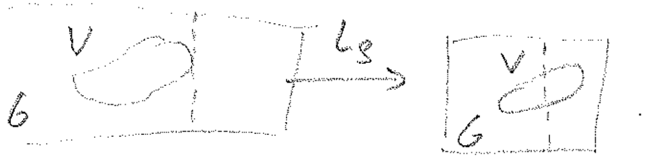
Die solchermaßen durch Äquivalenzklassen gebildeten Tangenten am Punkt $\mathbb{1}$ sind die Elemente von $\mathfrak{g}$.

Ausgehend von X bei e lässt sich dieses zu einem Vektorfeld $\tilde{X}$ auf G fortsetzen. Die Idee ist folgende.

Die Abb.

$$L_g : G\times G \to G \,,\quad (g,g) \mapsto gg$$

ist ein Diffeo von $G \to G$



Also lässt sich X von e zum Punkt g fortsetzen, indem ich

$$\tilde{X}[f](g) := \left\{\frac{d}{dt} f(g\gamma(t))\right\}_{t=0}$$

definiere. Insbesondere ist

$$\tilde{X}[f](\mathbb{1}) = X[f](\mathbb{1}) .$$

Ich kann das nicht beweisen, aber man kann zeigen, dass es zu den $\tilde{X}$ Kurven $\theta(t)$ auf G existieren, deren Tangente $\tilde{X}$ ist, also

$$\dot{\theta}(t) = \tilde{X}_{\theta(t)} \,,$$

und welche die Eigenschaft haben, dass

$$\theta(s+t) = \theta(s)\,\theta(t) \,,\quad \theta(0) = \mathbb{1} .$$

Dies ist nichts anderes als die Definition der Exponentialfunktion.

Da $\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)\,t + \dots$

$$= \mathbb{1} + Xt + \dots$$

und $e^{tA} = \mathbb{1} + At + \dots$

<u>Definiere</u> ich: $\boxed{\theta(1) = e^{X}}$

- exp ist also eine Abb. zwischen G und $\mathfrak{g}$.
- $\dim_{\mathbb{R}} G = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, Erzeuger X_a
- $g \in G$ lässt sich schreiben als
  $$g = e^{i\theta^a X_a} \,,\quad \theta^a \text{ aus den}$$
  Parametern von G, $\theta^a t^b = g^{ab}$.
- Oft wird definiert (observables), dass $X_a^\dagger = X_a$.

Die X_a erfüllen eine Algebra.

Sei $g = e^{i\lambda X_a}$, $g' = e^{i\lambda X_b} \in G$

$$g g' g^{-1} g'^{-1} = e^{i\lambda X_a} e^{i\lambda X_b} e^{-i\lambda X_a} e^{-i\lambda X_b}$$

$$= \mathbb{1} + \lambda^2 [X_a, X_b] + \dots$$

Nun ist für irgendein θ^c

$$g g' g^{-1} g'^{-1} = e^{i\theta^c X_c} \in G$$

$$= \mathbb{1} + i\theta^c X_c + \dots$$

Für $\lambda \to 0$ muss dann gelten:

$$\boxed{[X_a, X_b] = i f_{ab}^{\ \ c} X_c}, \quad \theta^c = f_{ab}^{\ \ c} \lambda^2$$

Bsp.: $SU(2)$

Die Bedingungen $AA^\dagger = 1$ und $\det A = 1$ übertragen sich Forderungen auf die Algebra

$$A = e^{i\theta n^a X_a}, \quad n^a n^a = 1, \quad \theta^a = \theta n^a$$

(Drehung um die Achse n^a)

① $\det A = \det e^{i\theta^a X_a}$ ← diagonalisier.

$$= \det M e^{i\theta^a X_a} M^\dagger$$

$$= \det e^{i M \theta^a X_a M^\dagger}$$

$$= e^{i \operatorname{tr} M \theta^a X_a M^\dagger}$$

$$\underset{\text{tr ist zykl.}}{=} e^{i\theta^a \operatorname{tr} X_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tr} X_a = 0} \Rightarrow X_a = \begin{pmatrix} A_a & B_a \\ C_a & -A_a \end{pmatrix} \quad (*)$$

② $AA^\dagger = \mathbb{1}$

zunächst ist $A = e^{i n^a \theta X_a}$ ← mit der Summe über a

$$\Rightarrow \mathbb{1} + i n^a \theta X_a - \frac{1}{2}\theta^2 (X_a^2) - \frac{i}{3!} n^b (X_a^2) X_b + \dots$$

$X_a^2 = (A_a^2 + B_a C_a)\mathbb{1}$ wegen $(*)$. Also kann ich die Terme $\sim$ zu $\mathbb{1}$ zusammen

$$= \sum_a \left\{ \cos\left[(A_a^2 + B_a C_a)\theta\right] + i n^a X_a \sin\left[(A_a^2 + B_a C_a)\theta\right] \right.$$

Somit ist

$$A A^\dagger = \sum_a \left[\cos^2 \left[(A_a^2 + B_a C_a)\theta \right] \mathbb{1} + X_a^2 \sin^2 \left[(A_a^2 + B_a C_a)\theta \right] \right]$$
$$= \mathbb{1}$$

Also muss $X_a^2 = \mathbb{1}$ gelten

und somit $A_a^2 = 1 - B_a C_a$

Drei Matrizen, welche diese Bed. erfüllen sind

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe:</u> Berechne $[\sigma_i, \sigma_j]$.

Verwende $\sigma_i \sigma_j = \mathbb{1} \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$.

Was sind geeignete X_i, so dass

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^{\;k} X_k$$

Was ist f_{ij}^k