SYMMETRISCHE GRUPPE AUF VIER ELEMENTEN

Ein erstes durchaus nicht-triviales Beispiel für das bis jetzt erarbeitete Material ist die symmetrische Gruppe auf vier Elementen, $\mathfrak{S}_4$. In natürlicher Weise operiert sie offensichtlich auf den vier Ecken eines Tetraeders durch Permutation. Diese Permutationen lassen sich durch Spiegelungen, Drehungen und Kombinationen davon erzeugen (vergleichen Sie mit Aufgabe 5 von Handout I). Im folgenden wollen wir allerdings die Aktion der Gruppe $\mathfrak{S}_4$ auf dem Würfel betrachten.

Konjugationsklassen. Die Konjugationsklassen symmetrischer Gruppen lassen sich sehr einfach angeben: Die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ hat genau $n!$ Elemente, die in $p(n)$ Konjugationsklassen zerfallen. Dabei ist $p(n)$ die Anzahl von Partitionen der natürlichen Zahl n in natürliche Zahlen. Zum Beispiel ist $p(4) = 5$ da die Zahl 4 zerlegt werden kann als

$$\{4, 3+1, 2+1+1, 1+1+1+1, 2+2\}\,.$$

Demnach sollte $\mathfrak{S}_4$ also fünf Konjugationsklassen besitzen. Konjugationsklassen werden üblicherweise durch einen Vertreter (Repräsentanten) angegeben. Ein solcher läßt sich folgendermaßen leicht angeben. Zu einer Partition $n = n_1 + \ldots + n_k$ definiere man das Gruppenelement

$$n_1 + \ldots n_k \mapsto (1\ldots n_1)(n_1+1\ldots n_1+n_2)\ldots(n_1+\ldots n_{k-1}+1\ldots n_1+\ldots n_{k-1}+n_k)$$

aus k disjunkten Zykeln. Zykel aus nur einem Element sind trivial, und werden daher nicht explizit notiert. Ein Zykel $(i_1 i_2 \ldots i_m)$ beschreibt die Permutation $\binom{i_1 i_2 i_3 \ldots i_{m-1} i_m}{i_m i_1 i_2 \ldots i_{m-2} i_{m-1}}$. Im Beispiel $\mathfrak{S}_4$ findet man also Repräsentanten der fünf Konjugationsklassen wie folgt

Partition	Repräsentant	g	$c(g)$	$[g]$
1+1+1+1	1	= (1)(2)(3)(4)	1	e
2+1+1	(12)	= (12)(3)(4)	6	C_2
3+1	(123)	= (123)(4)	8	C_3
4	(1234)		6	C_4
2+2	(12)(34)		3	C_2^2 .

Man mache sich nun klar, dass jeder dieser Repräsentanten unter Konjugation mit einem beliebigen Gruppenelement wieder in ein Gruppenelement übergeht, das eine äquivalente Zerlegung in Zykeln hat. Als Beispiel sei der Repräsentant $g = (123)$ für die Konjugationsklasse der 3-Zykel betrachet. Unter Konjugation $h^{-1}gh$ geht das über in $\binom{i_1 i_2 i_3 i_4}{1\ 2\ 3\ 4}(123)\binom{1\ 2\ 3\ 4}{i_1 i_2 i_3 i_4} = \binom{i_1 i_2 i_3 i_4}{2\ 3\ 1\ 4}\binom{1\ 2\ 3\ 4}{i_1 i_2 i_3 i_4} = \binom{i_3 i_1 i_2 i_4}{1\ 2\ 3\ 4}\binom{1\ 2\ 3\ 4}{i_1 i_2 i_3 i_4} = \binom{i_3 i_1 i_2 i_4}{i_1 i_2 i_3 i_4} = (i_1 i_2 i_3)$, also wieder in einen 3-Zykel, was zu zeigen war. Auf diese Weise kann man sich auch klar machen, wieviele Elemente eine Konjugationsklasse besitzt. Ein m-Zykel g hat per Definition die Ordnung m, d.h. $g^m = 1$. Es gibt also $(m-1)!\binom{n}{m}$ verschiedene m-Zykeln auf n Elementen. Für Konjugationsklassen, die aus mehreren nicht-trivialen Zykeln bestehen, ist die Sache etwas komplizierter. Es ergibt sich für eine Konjugationsklasse, die aus p_1 1-Zykeln, p_2 2-Zykeln etc. besteht (also zur Partition

$$n = \underbrace{1+\ldots+1}_{p_1} + \underbrace{2+\ldots+2}_{p_2} + \ldots + \underbrace{n}_{p_n} \quad\mapsto\quad g = C_1^{p_1} C_2^{p_2} \ldots C_n^{p_n}$$

gehört), dass sie genau

$$c(g) = n!\left(\prod_{m=1}^{n} m^{p_m} p_m!\right)^{-1}$$

Elemente enthält. Damit findet man die Anzahl $c(g)$ der Elemente der Konjugationsklassen $[g]$ für unser Beispiel $\mathfrak{S}_4$, wie in der Tabelle angegeben.

Charaktertafel. Mit den obigen Konjugationsklassen ausgestattet können wir die Charaktere der irreduziblen Darstellungen finden. Die Charaktertafel von $\mathfrak{S}_4$ lautet

$\mathfrak{S}_4$	e	$6C_2$	$8C_3$	$6S_4$	$3C_{2,2}$
U	1	1	1	1	1
U'	1	-1	1	-1	1
V	3	1	0	-1	-1
V'	3	-1	0	1	-1
W	2	0	-1	0	2 .

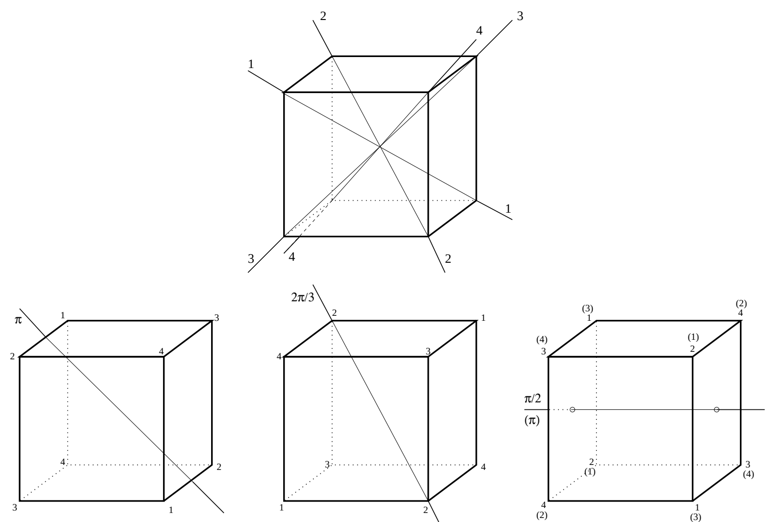
Die ersten drei der irreduziblen Darstellungen sind schnell gefunden, es sind die triviale, die alternierende und die Standard-Darstellungen U = *Trv*, U' = *Alt*, und V = *Std*. Man rät auch leicht, dass $V' = V \otimes U'$ irreduzibel sein könnte, und in der Tat ist $(\chi_{V'}, \chi_{V'}) = 1$. Außerdem ist klar, dass $\chi_{V'}$ linear unabhängig zu den anderen drei Charakteren ist. Da es höchstens fünf irreduzible Darstellungen geben kann, fehlt noch genau eine irreduzible Darstellung W mit Dimension zwei, da $24 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + x^2$ sein muß, was $x = 2$ impliziert. Der Charakter dieser letzten irreduziblen Darstellung ist schnell bestimmt: Die Vollständigkeit der regulären Darstellung einer endlichen Gruppe G bedeutet nämlich, dass

$$\begin{array}{rcl} \sum_\chi \overline{\chi(g)}\chi(g) & = & \frac{|G|}{c(g)}\,, \\ \sum_\chi \overline{\chi(g)}\chi(h) & = & 0 \qquad \text{für} \quad h \notin [g]\,. \end{array}$$

In den obigen Formeln läuft die Summe jeweils über die Charaktere sämtlicher irreduzibler Darstellungen. Das Bestimmen der Dimension der gesuchten irreduziblen Darstellunge ist also äquivalent zur Lösung der Gleichung $\sum_\chi \overline{\chi(e)}\chi(e) = 24$, und die Werte von χ_W für die anderen Konjugationsklassen erhält man analog.

Bemerkung. Die Darstellung W hat für C_2^2 im Charakter den Wert $\chi(C_2^2) = 2$. Nun ist C_2^2 eine Involution, die auf W die Spur zwei hat. Da W selbst zwei-dimensional ist folgt, dass C_2^2 auf W als die Identität operieren muss. Dazu eine allgemeine Bemerkung: Sei $N \subset G$ eine *normale Untergruppe*, d.h. $gN \in N$ und $Ng \in N$ für alle $g \in G$. Eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ sei trivial auf N. Dann hat man eine Faktorisierung $G \to G/N \to \mathrm{GL}(W)$, d.h. die Darstellungen von G/N können mit Darstellungen von G identifiziert werden, die trivial auf N sind. In unserem Beispiel ist $N = \langle e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\rangle$, und W ist eine Darstellung der Quotientengruppe $\mathfrak{S}_4/N \simeq \mathfrak{S}_3$. Genaues Hinsehen zeigt, dass W die Standard-Darstellung von $\mathfrak{S}_3$ ist. Man sagt dann auch, dass W die auf $\mathfrak{S}_4$ *zurückgezogene* Standard-Darstellung von $\mathfrak{S}_3$ ist (englisch: *pull back*).

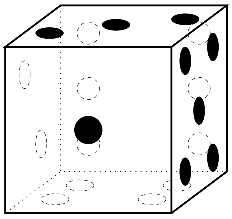
Interpretation. Die Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_4$ kann aufgefasst werden als die Gruppe der Bewegungen eines Würfels, die ihn wieder auf sich abbilden. Gemeint sind hier Bewegungen im Raum, also Drehungen und Verschiebungen, die man auch tatsächlich mit einem Würfel machen kann. Spiegelungen gehören *nicht* dazu. Die Gruppe agiert auf den vier Hauptdiagonalen des Würfels. $\mathfrak{S}_3$ ist dann die Quotientengruppe, die auf den drei Paaren gegenüberliegender Flächen agiert. Dazu ein paar Bildchen:



C_2 (12) $\quad$ C_3 (134) $\quad$ C_4 und C_2^2 (1243) und (14)(23)

Man beachte, dass die entsprechenden Drehungen auf den Hauptdiagonalen in der korrekten Art und Weise operieren, aber natürlich auch eine Darstellung auf den Flächen induzieren, ebenso auf den Kanten oder den Ecken. Dies sind jeweils Permutations-Darstellungen der Dimensionen $6, 12$ und 8. Am besten nimmt man sich einen Würfel mit Augen, und prüft selbst nach, wohin die drei Paare gegenüberliegender Augen (1,6), (2,5) und (3,4), von einer Ausgangslage ausgehend, durch die entsprechenden Drehungen abgebildet werden. Die Werte des Charakters sind einfach die Anzahl der durch die jeweilige Operation invariant gelassenen Flächen. Es folgt also, dass $\chi(C_2) = \chi(C_3) = 0$ und $\chi(C_4) = \chi(C_2^2) = 2$ ist. Damit ist der Charakter $\chi_{\text{Flächen}} = (6, 0, 0, 2, 2)$. Weiter ist $(\chi, \chi) = \frac{1}{24}(1 \cdot 6^2 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2) = 3$, also ist die Flächen-Darstellung Summe dreier irreduzibler Darstellungen. Mit der Charakter-Tabelle prüft man leicht nach, dass $(\chi, \chi_U) = (\chi, \chi_{V'}) = (\chi, \chi_W) = 1$ ist, und dass alle anderen Skalarprodukte von χ mit einem irreduziblen Charakter verschwinden. Die Flächen-Darstellung ist also isomorph zu $U \oplus V' \oplus W$. Die 6-dimensionale Flächen-Darstellung besitzt also eine 3-dimensionale Unterdarstellung, die von den drei Summen gegenüberliegender Flächenpaare aufgespannt wird. Diese enthält natürlich die Summe aller Flächen, also die triviale Darstellung, und ist daher $U \oplus W$. Die Differenz gegenüberliegender Flächenpaare spannt daher die noch verbleibende 3-dimensionale Darstellung V' auf.

Darstellung konkret. Wir ordnen nun jeder Fläche i einen Basisvektor e_i einer Orthonormal-Basis des $\mathbb{C}^6$ zu, denn die Flächen-Darstellung ist ja 6-dimensional. Wie bei einem Spielwürfel seien die gegenüberliegenden Flächen-Paare mit $(1,6)$, $(2,5)$ und $(3,4)$ numeriert. Im folgenden wählen wir zum Vergleich mit obigen Bildchen die Konvention, dass bei Ausgangsstellung die 1 vorne, die 2 auf der linken Seite, und die 3 oben liegen. Das sieht dann so aus:



Dann sind die in den Bildchen zu sehenden Repräsentanten der jeweiligen Konjugationsklassen durch die folgenden 6×6 Matrizen dargestellt:

$$\rho_{\text{Flächen}}((12)) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\text{Flächen}}((134)) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{\text{Flächen}}((1243)) = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\text{Flächen}}((14)(23)) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden nun eine neue Basis dieses 6-dimensionalen Vektorraumes, indem wir die Summen und Differenzen der Basisvektoren zu gegenüberligenden Flächen verwenden, d.h. wir setzten $s_{16} = e_1 + e_6$, $s_{25} = e_2 + e_5$, $s_{34} = e_3 + e_4$, $d_{16} = e_1 - e_6$, $d_{25} = e_2 - e_5$, $d_{34} = e_3 - e_4$. Man prüft leicht nach, dass die d_{ij} alle orthogonal zu den $s_{i'j'}$ sind. Wir können nun die Ausreduzierung der reduziblen 6-dimensionalen Flächen-Darstellung in irreduzible Darstellungen angeben. U ist ein 1-dimensionaler Vektorraum und wird aufgespannt durch $u = s_{16} + s_{25} + s_{34} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$. Der 3-dimensionale Unterraum, der durch die Vektoren s_{ij} aufgepsannt wird, zerlegt sich also in die direkte Summe $U \oplus W$, wobei der 2-dimensionale Raum W zum Beispiel durch die zwei Vektoren $w_1 = s_{16} + s_{25} - 2s_{34} = e_1 + e_2 - 2e_3 - 2e_4 + e_5 + e_6$ und $w_2 = s_{16} - s_{25} = e_1 - e_2 - e_5 + e_6$ aufgespannt wird. In der Tat sind w_1, w_2 beide orthogonal zu u, und übrigens auch orthogonal zueinander. Die Darstellung auf U ist natürlich trivial, d.h. $\rho_U(g) = 1$ für alle $g \in \mathfrak{S}_4$. Interessant ist es, die Darstellung auf W explizit auszurechnen. Wenn wir wieder die obigen Repräsentanten der Konjugationsklassen verwenden, erhalten wir in der Basis w_1, w_2 die Matrizen

$$\rho_W((12)) = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \rho_W((134)) = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_W((1243)) = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \rho_W((14)(23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies bestätigt, dass C_2^2 in der Tat trivial auf W operiert. Die Spuren der Matrizen ergeben genau die Werte, die wir aus der Charaktertafel erwarten würden — voila! Wer will, kann jetzt noch die Matrizen für $\rho_{V'}(g)$ ausrechnen.

Aufgabe. Man wiederhole das obige Spiel nun für die Ecken und die Kanten des Würfels. Zur Kontrolle die Ergebnisse:

Darstellung		Zerlegung	Dimensionen		
Flächen-Darstellung	=	$U \oplus V' \oplus W$	$1+3+2$	=	6
Ecken-Darstellung	=	$U \oplus V \oplus U' \oplus V'$	$1+3+1+3$	=	8
Kanten-Darstellung	=	$U \oplus 2V \oplus V' \oplus W$	$1+2\cdot 3+3+2$	=	12.

Alternierende Gruppe. Ergänzend wollen wir noch die alternierende Untergruppe $\mathfrak{A}_4 \subset \mathfrak{S}_4$ betrachten, die erzeugt ist als $\mathfrak{A}_4 = \langle e, (123), (12)(34) \rangle$. Man beachte zunächst, dass $\mathfrak{A}_4 / \langle e, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ ist. Mit

$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ der dritten Einheiswurzel, ist die Charakter-Tabelle schnell gefunden:

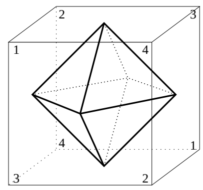
$\mathfrak{A}_4$	e	4(123)	4(132)	3(12)(34)
U	1	1	1	1
U'	1	ω	ω^2	1
U''	1	ω^2	ω	1
V	3	0	0	-1 .

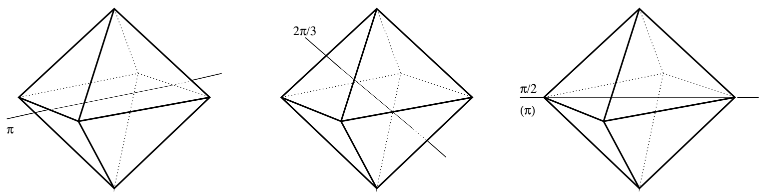
Die ersten drei Zeilen sind klar, da auch $\mathfrak{A}_4$ die oben erwähnte normale Untergruppe enthält. Die letzte Zeile ergibt sich dann wieder aus den Vollständigkeitsrelationen. Die Beziehungen der irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{A}_4$ ergeben sich wie folgt durch Restriktion (Einschränkung) auf die Untergruppe:

Darstellungen von $\mathfrak{S}_4$	*Restriktion*	Darstellungen von $\mathfrak{A}_4$
$\left.\begin{array}{c} U \\ U' \end{array}\right\}$	$\longrightarrow$	U ,
$\left.\begin{array}{c} V \\ V' \end{array}\right\}$	$\longrightarrow$	V ,
W	$\longrightarrow$	$U' \oplus U''$.

Demnach bleiben die Darstellungen U, U', V und V' von $\mathfrak{S}_4$ unter Einschränkung auf $\mathfrak{A}_4$ irreduzibel, während die Darstellung W sich unter Einschränkung auf die Untergruppe $\mathfrak{A}_4$ in zwei irreduzible Unterdarstellungen $U' \oplus U''$ zerlegt (man beachte, dass $\omega + \omega^2 = -1$ ist). Weiterhin werden die Paare U, U' und V, V' unter Einschränkung jeweils isomorph.

Oktaeder und Würfel — Dualität. Der Würfel hat 6 Flächen, 12 Kanten und 8 Ecken. Das Oktaeder hat 8 Flächen, 12 Kanten und 6 Ecken. Formal besteht eine Dualität zwischen Würfel und Oktaeder, indem man die Mittelpunkte der Flächen durch Ecken ersetzt und umgekehrt. Eine Konsequenz davon ist, dass die Gruppe der starren Bewegungen für Würfel und Oktaeder die gleiche ist. Davon wurde bei dem Beispiel eines f-Elektrons im Oktaeder Gebrauch gemacht. Zur Verdeutlichung seien die entsprechenden Dreh-Operationen auch für den Oktaeder dargestellt:





$C_2 = (13)$ $C_3 = (234)$ $C_4 = (1243)$ und $C_2^2 = (14)(23)$

Die natürliche Permutations-Darstellung für den Würfel, nämlich auf den vier Hauptdiagonalen, geht über in die natürliche Permutations-Darstellung auf den gegenüberliegenden Flächenpaaren (die durch die jeweiligen Hauptdiagonalen des umschreibenden Würfels durchstoßen werden). Man mache sich wieder klar, dass die jeweilige Anzahl von Elementen $c(g)$ der Konjugationsklasse $[g]$ in der Tat korrekt ist.