TOPOLOGISCHE RÄUME

Man beginnt mit *Mengen* S von Punkten. Wenn der Punkt s_i ein Element von S ist, schreibt man $s_i \in S$. Es seien S_1 und S_2 zwei Mengen von Punkten. Man sagt, S_1 ist eine *Teilmenge* von S_2, wenn jeder Punkt von S_1 auch in S_2 enthalten ist, und schreibt $S_1 \subset S_2$. Wenn es auch Punkte in S_2 gibt, die nicht in S_1 enthalten sind, sagt man, dass S_1 eine *echte Teilmenge* von S_2. Die Menge, die keine Punkte enthält, heißt *leere Menge*, und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Die *Vereinigung* $S_1 \cup S_2$ zweier Mengen S_1 und S_2 enthält alle Punkte aus entweder S_1 oder S_2. Die *Schnittmenge* $S_1 \cap S_2$ zweier Mengen S_1 und S_2 enthält die Punkte, die sowohl Element von S_1 als auch Element von S_2 sind.

Topologischer Raum. Ein *topologischer Raum* T ist eine Menge von Punkten, die mit einer *Topologie* $\mathcal{T}$ ausgestattet ist. Eine Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Auswahl (Menge) von Teilmengen $S_1, S_2, \ldots$ von T, d.h. $S_i \subset T$, $S_i \in \mathcal{T}$, die die folgenden drei Axiome erfüllt:

$\mathcal{T}1$: Die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum T gehören zu $\mathcal{T}$, d.h. $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $T \in \mathcal{T}$.
$\mathcal{T}2$: Endliche Schnittmengen von Elementen von $\mathcal{T}$ gehören zu $\mathcal{T}$, d.h. $\bigcap_{i\in I} S_i \in \mathcal{T}$ für $|I| < \infty$.
$\mathcal{T}3$: Beliebige Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{T}$ gehören zu $\mathcal{T}$, d.h. $\bigcup_{i\in I} S_i \in \mathcal{T}$.

Die Elemente S_i der Topologie $\mathcal{T}$ werden *offene Mengen* genannt. Um Mannigfaltigkeiten definieren zu können, ist dies zu allgemein. Man benötigt ein weiteres Axiom, das die *Separierbarkeit* zum Ausdruck bringt. Damit meint man, dass man für zwei verschiedene Punkte p, q in T immer offene Teilmengen S_p und S_q finden kann, die jeweils p bzw. q enthalten, aber die nicht überlappen. Das drückt sich wie folgt aus:

$\mathcal{T}4$: Wenn $p \in T$ und $q \in T$ mit $p \neq q$ verschiedene Punkte sind, dann existieren $S_p \in \mathcal{T}$ und $S_q \in \mathcal{T}$ mit den Eigenschaften $p \in S_p$, $q \in S_q$, und $S_p \cap S_q = \emptyset$.

Ein topologischer Raum, der auch Axiom $\mathcal{T}4$ erfüllt, heißt *Hausdorff Raum*. Eine offene Menge S_p, die den Punkt p enthält, heißt auch *Umgebung* von p. Um deutlich zu machen, dass T ein topologischer Raum ist, gibt man stattdessen das Tupel $(T, \mathcal{T})$ an.

MANNIGFALTIGKEITEN

Der topologische Begriff der Stetigkeit ist sehr einfach zu definieren: Eine Abbildung $\phi : (T, \mathcal{T}) \to (U, \mathcal{U})$ eines topologischen Raumes T in einen topologischen Raum U heißt *stetig*, wenn das Urbild jeder offenen Menge in U eine offene Menge in T ist. Damit haben wir alles zusammen, um zur Definition zu schreiten.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine *differenzierbare mannigfaltigkeit* $\mathcal{M}$ ist ein Hausdorff Raum $(T, \mathcal{T})$ zusammen mit einem Satz Φ von Abbildungen $\phi_p \in \Phi$, $\phi_p : T \to \mathbb{R}^n$, $p \in T$, mit den folgenden vier Eigenschaften:

$\mathcal{M}1$: ϕ_p ist eine 1–1 Abbildung einer offenen Menge T_p mit $p \in T_p$ in eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{M}2$: Die Vereinigung $\bigcup_p T_p = T$.
$\mathcal{M}3$: Ist $T_p \cap T_q$ nicht leer, so ist $\phi_p(T_p \cap T_q)$ eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, und $\phi_q(T_p \cap T_q)$ ist eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ verschieden von $\phi_p(T_p \cap T_q)$. Die Abbildung $\phi_p \circ \phi_q^{-1}$ muß stetig und differenzierbar sein.
$\mathcal{M}4$: Die Abbildungen $\phi_p \circ \phi_q^{-1}$ und $\phi_q \circ \phi_p^{-1}$ aus Axiom $\mathcal{M}3$ sind Abbildungen in Φ. Diese Eigenschaft heißt auch *Maximalität*.

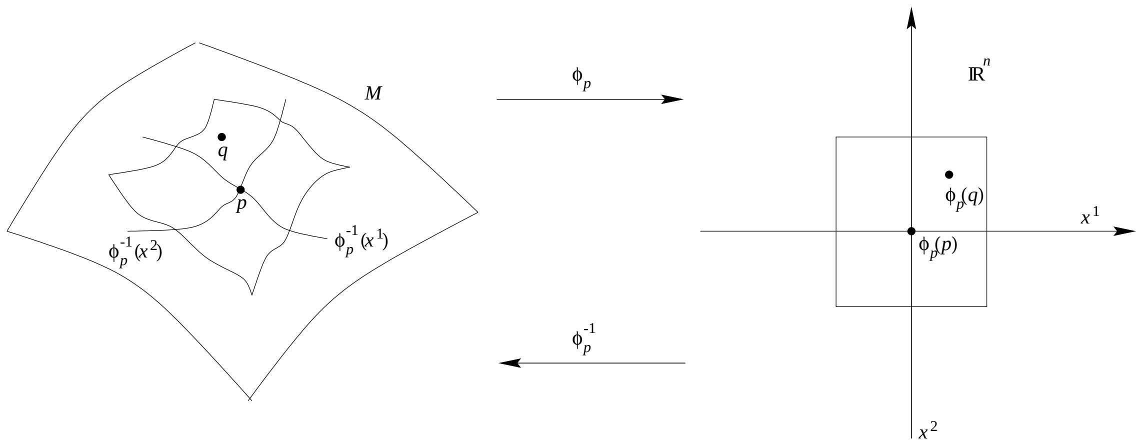
Die Eigenschaft $\mathcal{M}1$ erlaubt es, ein Koordinatensystem für eine Umgebung eines jeden Punkte p zu konstruieren. Der Punkt p wird in den Ursprung von $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe von ϕ_p abgebildet. Jeder Punkt q in der Nähe von p wird damit in einen Punkt $\phi_p(q)$ nahe $\mathbf{0} = \phi_p(p)$ abgebildet. Damit kann man dann die Koordinaten $\phi_p^i(q)$, $i = 1, \ldots, n$ von $\phi_p(q) \in \mathbb{R}^n$ mit dem originalen Punkt $q \in T$ assoziieren. Diese Assoziation liefert ein (lokales) Koordinatensystem für ganz T.

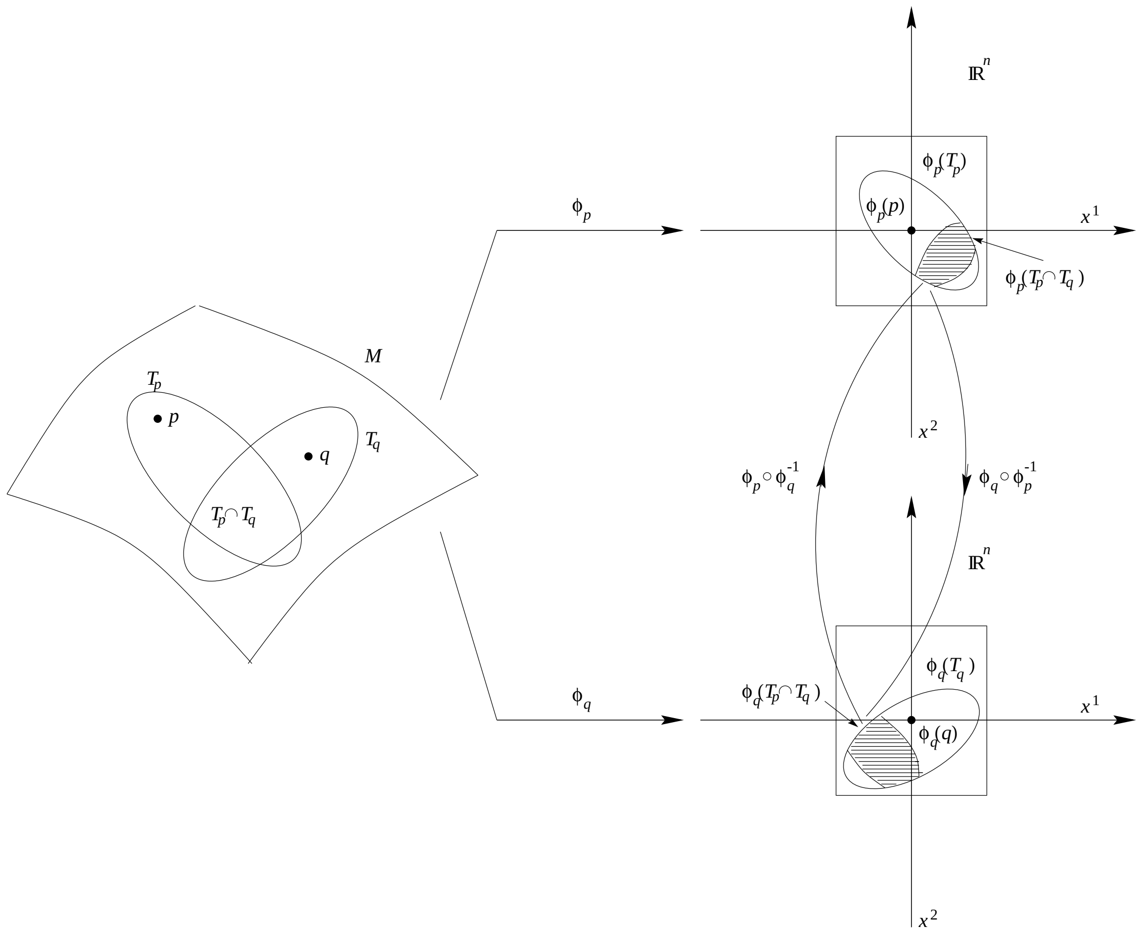
Axiom $\mathcal{M}2$ stellt sicher, dass tatsächlich ein solches lokales Koordinatensystem für jeden Pubnkt in T konstruiert werden kann.

Axiom $\mathcal{M}3$ verwendet die Abbildung $\phi_p \circ \phi_q^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die mit Standardmethoden des Differentialkalküls studiert werden kann. Hierbei heißt eine Abbildung ϕ differenzierbar immer, dass $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ ist.

Mannigfaltigkeiten sind ein sehr wichtiges Konzept. Sie sind gerade noch gutartig genug, um überall lokal wie der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ auszusehen. Daher kann man alle Mehtoden und Konzepte, die man für das Studium des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ kennt, mit Hilfe der Axiome $\mathcal{M}1$ bis $\mathcal{M}3$ auf die Mannigfaltigkeit übertragen. Insbesondere ist die *Dimension* der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ die Dimension des Raumes $\mathbb{R}^n$, also n.

Komplexe Mannigfaltigkeiten. Ganz ähnlich kann man andere Sorten von Mannigfaltigkeiten definieren. Eine komplexe Mannigfaltigkeit erhält man, indem man in obiger Definition überall $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzt, und am Ende von $\mathcal{M}3$ das Word differenzierbar durch *komplex analytisch* austauscht.


M
ϕ_p
ϕ_p^{-1}
q
p
$\phi_p^{-1}(x^1)$
$\phi_p^{-1}(x^2)$
$\mathbb{R}^n$
$\phi_p(q)$
$\phi_p(p)$
x^1
x^2


M
T_p
p
q
T_q
$T_p \cap T_q$
ϕ_p
ϕ_q
$\mathbb{R}^n$
$\phi_p(T_p)$
$\phi_p(p)$
x^1
$\phi_p(T_p \cap T_q)$
x^2
$\phi_p \circ \phi_q^{-1}$
$\phi_q \circ \phi_p^{-1}$
$\mathbb{R}^n$
$\phi_q(T_q)$
$\phi_q(T_p \cap T_q)$
$\phi_q(q)$
x^1
x^2