GROSS 'Ad' UND KLEIN 'ad'

Die Darstellungstheorie von Lie-Gruppen G besteht im wesentlichen darin, Lie-Gruppen-Homomorphismen $\rho : G \to H$ zu studieren, wobei $H \subset GL(V)$ eine Matrix-Untergruppe der allgemeinen Linearen Gruppe zu einem Vektorraum V ist. Das Problem ist, dass Lie-Gruppen auch (komplizierte) Mannigfaltigkeiten sind, und ρ die differenzierbare Struktur respektieren muß. Der erste Schritt zur Lösung dieses Problems ist, es auf rein lokale Information über die Lie-Gruppe in einer Umgebung des Eins-Elements zu reduzieren. Diese Information steckt in der Lie-Algebra, dem Tangentialraum T_eG der Lie-Gruppe am Eins-Element. Die (komplizierte) Topologie wird dabei "vergessen", und alles spielt sich nun in Vektorräumen ab. Dass die lokale Information für fast alles, was man wissen möchte, ausreichend ist, wird durch die folgenden beiden Prinzipien ausgedrückt.

Prinzip (I). Seien G und H zwei Lie-Gruppen, G zusammenhängend. Eine Abbildung $\rho : G \to H$ ist eindeutig bestimmt durch ihr Differential $\mathrm{d}\rho_e : T_eG \to T_eH$ an der Stelle des Eins-Elements.

Prinzip (II). Seien G und H zwei Lie-Gruppen, G zusammenhängend und einfach zusammenhängend. Eine lineare Abbildung $T_eG \to T_eH$ ist das Differential eines Homomorphismus $\rho : G \to H$ dann und nur dann, wenn es die Lie-Klammer respektiert, d.h. $\mathrm{d}\rho_e([X,Y]) = [\mathrm{d}\rho_e(X), \mathrm{d}\rho_e(Y)]$ für alle $X, Y \in T_eG$.

Diese beiden Prinzipien haben wir uns in der Vorlesung durch Einführen einer bestimmten Abbildung motiviert, die die sogenannte *adjungierte* Darstellung der Gruppe auf ihrem eigenen Tangentialraum realisiert. Diese Darstellung hat per definitionem die Dimension dim$G$.

Ad. Die Gruppen-Multiplikation $m_g : G \to G$ von links ist nicht gut geeignet, auf lokale Information reduziert zu werden, da sie im allgemeinen keinen Fixpunkt hat. Besser ist da die Gruppen-Konjugation $\psi_g : G \to G$, die jedes Gruppenelement h auf $g \cdot h \cdot g^{-1}$ abbildet. Deren Differential Ad$(g) = (\mathrm{d}\psi_g)_e : T_eG \to T_eG$ sollte schon einiges an Struktur der Gruppe verraten. Wichtig ist sich klarzumachen, dass Ad(g) für jedes $g \in G$ eine Abbildung $T_eG \to T_eG$ des Tangentialraumes auf sich definiert. Damit ist Ad: $G \to \mathrm{Aut}(T_eG)$ nach Konstruktion eine Darstellung der Gruppe G auf dem Vektorraum T_eG. Die wichtigsten Eigenschaften von Ad werden durch die folgenden Diagramme ausgedrückt, die kommutieren, wenn $\rho : G \to H$ ein Homomorphismus ist:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & H \\ {\scriptstyle \psi_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\rho(g)}} \\ G & \xrightarrow{\rho} & H \end{array} \quad \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)=(\mathrm{d}\psi_g)_e} \quad \begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{(\mathrm{d}\rho)_e} & T_eH \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}(\rho(g))} \\ T_eG & \xrightarrow{(\mathrm{d}\rho)_e} & T_eH \end{array} .$$

Das zweite Diagramm liest sich in Formeln als die Bedingung $\mathrm{d}\rho(\mathrm{Ad}(g)(X)) = \mathrm{Ad}(\rho(g))(\mathrm{d}\rho(X))$ für alle X, die Element des Tangentialraumes sind.

ad. Die obige Bedingung hat den kleinen Schönheitsfehler, dass die Abbildung ρ an einer Stelle noch explizit auftritt. Das können wir dadurch vermeiden, dass wir das Differential von Ad betrachten, ad: $T_e \to \mathrm{End}(T_eG)$. Wichtig ist sich klarzumachen, dass ad(X) für jedes $X \in T_eG$ eine Abbildung $T_eG \to T_eG$ des Tangentialraumes auf sich definiert, d.h. ad$(X)(Y)$ ist eine lineare Abbildung ad(X) von Tangentialvektoren Y, und ergibt wieder einen Tangentialvektor in T_eG. Man beachte allerdings, dass ad$(\cdot)$ im Gegensatz zu Ad$(\cdot)$, nur ein Endomorphismus zu sein braucht und nicht notwendigerweise ein Automorphismus ist. Als Matrizen betrachtet kann z.B. ad(X) auch Determinante null haben, was bei Ad(g) schon von den Gruppenaxiomen her nicht möglich ist. Nun ist ad$(X)(Y) : T_eG \times T_eG \to T_eG$ offensichtlich eine bilineare Abbildung, was das Einführen einer Klammer-Notation motiviert. Wir definieren die *Lie-Klammer* als $[X,Y] \equiv \mathrm{ad}(X)(Y)$. Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\rho : G \to H$ wird dadurch charakterisiert, dass sein Differential die Lie-Klammer respektiert, dass also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{(\mathrm{d}\rho)_e} & T_eH \\ {\scriptstyle \mathrm{ad}(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ad}(\mathrm{d}\rho(X))} \\ T_eG & \xrightarrow{(\mathrm{d}\rho)_e} & T_eH \end{array}$$

kommutiert. In Formeln liest sich das als die Bedingung $\mathrm{d}\rho_e(\mathrm{ad}(X)(Y)) = \mathrm{ad}(\mathrm{d}\rho_e(X))(\mathrm{d}\rho_e(Y))$ oder in der Notation mit der Lie-Klammer als $\mathrm{d}\rho_e([X,Y]) = [\mathrm{d}\rho_e(X), \mathrm{d}\rho_e(Y)]$ für alle $X, Y \in T_eG$.

Zum Verständnis ist es sehr hilfreich sich die beiden Definitionen von 'Ad' und 'ad' dadurch klarzumachen, dass man sich für $g \in G$ und $X \in T_eG$ Matrizen aus Aut(V) bzw. End(V) für irgendein V vorstellt, z.B. indem man $G = \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ setzt. Dann ist übrigens End$(\mathbb{R}^n) = M_n\mathbb{R}$. Die Operationen 'Ad' und 'ad' lassen sich dann recht explizit angeben. Dazu betrachtet man einen beliebigen parametrisierten Weg $\gamma : I \to G$ in der Mannigfaltigkeit G mit den Eigenschaften $\gamma(0) = e$ und $\gamma'(0) = X$ für einen vorgegebenen Tangentialvektor $X \in T_eG$. Dann gilt $\mathrm{Ad}(\gamma(t))(Y) = \gamma(t) \cdot Y \cdot \gamma(t)^{-1}$ und die Lie-Klammer nimmt tatsächlich die uns vertraute Form an:

$$[X, Y] = \mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\mathrm{Ad}(\gamma(t))(Y)\right)\big|_{t=0} = X \cdot Y - Y \cdot Y \,.$$

Lie-Algebra. Eine *Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ ist ein Vektorraum zusammen mit einer bilinearen schiefsymmetrischen Abbildung $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, die die Jacobi-Identität erfüllt. Diese Definition enthält implizit eine sehr weitreichende Feststellung, die man aus der Operation 'ad' herausholen kann. Ein Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Operation ist nämlich genau dann Tangentialraum am Eins-Element einer Lie-Gruppe, wenn diese bilineare Operation schiefsymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt. Unsere Definiton von ad ging von einer gegebenen Lie-Gruppe G aus, und lieferte uns per Konstruktion die schiefsymmetrische Lie-Klammer $[X, Y] = -[Y, X]$, die auch automatisch die Jacobi-Identität erfüllt, da sie als Kommutator realisiert werden kann. Wir werden bald sehen, dass auch die Umkehrung gilt. Hat man eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, kann man aus ihrer Lie-Klammer ein Gruppen-Gesetz und damit eine Lie-Gruppe konstruieren.

Eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf einem Vektorraum V ist einfach eine Abbildung zwischen Lie-Algebren $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$, d.h. eine Abbildung die die Lie-Klammer respektiert so dass für alle $v \in V$ eine Operation von $\mathfrak{g}$ auf V gegeben ist durch $[X, Y](v) = X(Y(v)) - Y(X(v))$.

Lie-Gruppe versus Lie-Algebra. Zusammenfassend können wir sagen: Der Tangentialraum $\mathfrak{g}$ am Eins-Element einer Lie-Gruppe G ist in natürlicher Weise mit der Struktur einer Lie-Algebra ausgestattet. Weiter sind für Lie Gruppen G und H mit G zusammenhängend und einfach zusammenhängend die Abbildungen $\rho : G \to H$ in eins-zu-eins Korrespondenz mit Abbildungen zwischen den assoziierten Lie-Algebren, indem man zu ρ jeweils das Differential $(\mathrm{d}\rho)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ assoziiert.

Die Exponential-Abbildung

Wir haben nun ein Gefühl dafür, wie wir die Lie-Gruppe auf lokale Information reduzieren können, die in ihrer Lie-Algebra steckt. Nun wollen wir sehen, dass man von der Lie-Algebra auch wieder zurückkommt, und in der Tat (fast) die gesamte Gruppenstruktur rekonstruieren kann. Wir wollen dazu einen gegebenen Tangentialvektor $X \in \mathfrak{g} = T_eG$ betrachten. Weiter sei $\Gamma_X = \{\gamma : I \to G : \gamma(0) = e, \gamma'(0) = X\}$ die Menge aller parametrisierten Wege in G, die am Eins-Element beginnen und dort in Richtung X führen.

Vektorfelder. Zu einer Mannigfaltigkeit M kann man den Ring der differenzierbaren Funktionen $C^\infty(M)$ definieren. Jede Funktion $f \in C^\infty(M)$ ordnet jedem Punkt $p \in M$ einen Wert, d.h. einen Punkt $p' = f(p) \in M$ zu. Ein *Vektorfeld* v ordnet nun für ein gegebenens f jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor von f an der Stelle p zu, d.h. $(v(f))(p) = v_p(f) \in T_pM$.

Ein elementarer Satz der Differentialgeometrie besagt, dass Vektorfelder v auf M integriert werden können zu Funktionen $\phi : I \to M$ mit Randbedingungen $\phi(0) = p$ für ein $p \in M$, und $\phi'(t) = v_{\phi(t)}$. Die Funktion ϕ ist durch die Angabe der Randbedingungen dann auch eindeutig charakterisiert.

Linksinvariante Vektorfelder. Jedem Tangentialvektor $X \in \mathfrak{g}$ kann genau ein sogenanntes *links-invariantes Vektorfeld* $\tilde{X}$ zugeordnet werden, so dass $\tilde{X}_e = X$ ist. Zunächst ist $\tilde{X}$ ein Vektorfeld, das einer Funktion $f \in C^\infty(G)$ zu jedem Element $g \in G$ einen Tangentialvektor $\tilde{X}_g(f) \in T_gG$ zuordnet. Die Links-Invarianz besagt nun, dass diese Zuordnung mit der Gruppen-Multiplikation von links verträglich ist, $m_g : G \to G$, die jedem $h \in G$ das Element $g \cdot h$ zuordnet. Ein $\tilde{X}$ mit dieser Eigenschaft ist einfach zu finden:

$$\tilde{X}_g(g) = \mathrm{d}m_g X(f) = X(f \circ m_g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(g \cdot \gamma(t))\big|_{t=0} \,,$$

wobei γ ein beliebiges Element aus Γ_X ist. In der Tat gilt damit offensichtlich

$$\mathrm{d}m_h \tilde{X}_g(f) = \mathrm{d}m_h \mathrm{d}m_g X(f) = X(f \circ m_g \circ m_h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(h \cdot g \cdot \gamma(t))\big|_{t=0} = \tilde{X}_{hg}(f) \,.$$

Am schnellsten sieht man es ein, wenn man für f selbst einfach $m_{g'}$ einsetzt. Das links-invariante Vektorfeld $\tilde{X}$ transportiert also den Tangentialvektor $X \in T_eG$ verträglich mit der Gruppen-Multiplikation m_g auf einen Tangentialvektor in T_gG.

Natürlich können auch links-invariante Vektorfelder integriert werden, wobei wir nun die Randbedingungen stellen, dass $\phi(0) = e$ und $\phi'(t) = \tilde{X}_{\phi(t)}$ ist. Die Links-Invarianz des speziellen Vektorfeldes $\tilde{X}$ hat aber zusammen mit der Eindeutigkeit der Integralkurve die Konsequenz, dass ϕ, wo es denn definiert ist, ein Homomorphismus ist, d.h. $\phi(s+t) = \phi(s)\cdot\phi(t)$ für $s,t \in I$. Wir wollen das mal so hinschreiben:

$$\tilde{X}_{\phi(s)}(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(\phi(s)\cdot\phi(t))|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(\phi(s+t))|_{t=0}\ ,$$

da aufgrund der Randbedingungen für ϕ klar ist, dass $\phi \in \Gamma_X$.

Ein-Parameter-Untergruppen. Die Existenz links-invarianter Vektorfelder zu gegebenen Tangentialvektoren $X \in \mathfrak{g}$ liefert uns also Integralkurven, die gleichzeitig Gruppen-Homomorphismen sind. Diese nennt man daher *Ein-Parameter-Untergruppen*. Aufgrund der Gruppenstruktur sind diese Ein-Parameter-Untergruppen $\phi_X(t)$ automatisch nicht nur für $t \in I$ definiert, sondern für $t \in \mathbb{R}$. Eine andere Sichtweise ist es zu sagen, dass es für jedes $X \in \mathfrak{g}$ in der zugehörigen Familie Γ_X genau einen Weg gibt, der ein Gruppen-Homomorphismus ist. Dieser Weg ist die Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes $\tilde{X}$. Da das für alle $X \in T_eG$ geht, füllen die Ein-Parameter-Untergruppen eine Umgebung vom Eins-Element völlig aus. Da aber eine Umgebung der Eins bereits die ganze (Zusammenhangskomponente der Eins der) Gruppe G erzeugt, haben wir schließlich das gewünschte Resultat, dass die Information in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ausreicht, die Gruppe (weitgehend) zu rekonstruieren.

Exponential-Abbildung. Die Integralkurve erfüllt die Funktionalgleichung $\phi(s+t) = \phi(s)\cdot\phi(t)$. Dies ist die Funktionalgleichung der Exponentialfunktione. Man definiert daher

$$\begin{array}{rcl} \exp : \mathfrak{g} & \to & G \\ \exp(X) & = & \phi_X(1) \end{array} .$$

Da ϕ eindeutig ist, gilt offensichtlich $\phi_{\lambda X}(t) = \phi_X(\lambda t)$. Die Exponential-Abbildung, eingeschränkt auf Linien durch den Ursrpung von $T_eG = \mathfrak{g}$, liefert gerade die Ein-Parameter-Untergruppen. Genauer ist sie die *eindeutige* Abbildung $\mathfrak{g} \to G$, die den Ursprung auf das Eins-Element sendet, $0 \mapsto e$, deren Differential am Ursprung die Identität ist, d.h.

$$(\mathrm{d}\exp)_0 : T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \to T_eG = \mathfrak{g}\,,$$

und deren Einschränkung auf Ursprungsgeraden die Ein-Parameter-Untergruppen liefert. Diese Abbildung ist natürlich in dem Sinne, dass für beliebige Lie-Gruppen-Abbildungen $\rho : G \to H$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{(\mathrm{d}\rho)} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow{\rho} & H \end{array}$$

kommutiert. Damit können wir Darstellungen von Lie-Gruppen über Darstellungen von Lie-Algebren studieren!

Da $(\mathrm{d}\exp)_0$ in $\mathfrak{g}$ ein Isomorphismus ist, enthält das Bild $\mathrm{Im}(\exp) \supset U$ eine Umgebung der Eins e in G. Ist G zusammenhängend, so generiert U ganz G womit das Prinzip (I) auf festen Grund gestellt wird. Außerdem ergibt sich die folgende einfache Beziehung von 'Ad' zu 'ad': $\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X))$, die man mit Hilfe der sogenannten *Baker-Campbell-Hausdorff-Formeln* ableitet. Dies liefert schließlich auch Prinzip (II).

Baker-Campbell-Hausdorff. Mit Hilfe der Exponential-Abbildung können wir Elementen der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ Elemente der zugehörigen Lie-Gruppe G zuordnen. Wie ist aber das Gruppengesetz implementiert, d.h. wie findet man das Element $Z \in \mathfrak{g}$, so dass $\exp(X)\cdot\exp(Y) = \exp(Z)$ ist? Explizit kann man dies, wenn man die Lie-Gruppe (und ihre Algebra) durch Matrizen realisiert. Dann ist die Exponential-Abbildung nichts anderes, als

$$\exp(X) = \sum_n \frac{1}{n!} X^n\,,$$

was konvergiert und invertierbar ist mit Inversem $\exp(-X)$. Offensichtlich ist $(\mathrm{d}\exp)_0 = 1$. Für die Ein-Parameter-Untergruppen erhält man sofort

$$\exp(\lambda X)\exp(\mu X) = \sum_n\sum_m \frac{1}{n!}\frac{1}{m!}\lambda^n\mu^m X^{n+m} = \sum_N\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{N!}\binom{N}{k}\lambda^k\mu^{N-k}X^N = \sum_N(\lambda{+}\mu)^N X^N = \exp((\lambda{+}\mu)X)\,.$$

Aber die ganze Gruppenstruktur steckt in der Lie-Algebra. Dazu seien X, Y aus einer hinreichend kleinen Umgebung der $0 \in \mathfrak{g}$ gewählt. Weiter betrachte man für $g \in G \subset \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ die Abbildung

$$\log(g) = -\sum_n \frac{(-)^n}{n}(g-e)^n \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R}\,,$$

die natürlich nur für solche g gültig ist, die in einer hinrreichend kleinen Umgebung des Eins-Elements liegen. Dort, wo sie definiert ist, ist diese Abbildung natürlich das Inverse der Exponential-Abbildung. Damit definiert man nun das *Baker-Campbell-Hausdorff-Produkt*

$$X * Y = \log(\exp(X) \cdot \exp(Y))\,.$$

Der entscheidende Punkt ist nicht das explizite Aussehen von $X * Y$, sondern dass das Resultat allein von X, Y und den Operationen ad(X) und ad(Y) abhängt. Die ersten Terme sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} X * Y &= (X+Y) + \tfrac{1}{2}[X,Y] + \tfrac{1}{12}\left([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\right) + \ldots \\ &= (X+Y) + \tfrac{1}{2}\mathrm{ad}(X)(Y) + \tfrac{1}{12}\left(\mathrm{ad}(\mathrm{ad}(X))(Y) + \mathrm{ad}(\mathrm{ad}(Y))(X)\right)\ldots \\ &= \big(1 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{ad}X - \mathrm{ad}Y) + \tfrac{1}{12}(\mathrm{ad}^2X + \mathrm{ad}^2Y) + \ldots\big)\,(X+Y)\,. \end{aligned}$$

Insbesondere treten also keine Objekte wie X^n allein auf, sondern alle Terme lassen sich so zusammenfassen, dass sie gänzlich durch Elemente der Lie-Algebra und deren Lie-Klammern ausgedrückt werden können. Der Beweis solcher Formeln ist nicht einfach, aber Dynkin hat eine geschlossene Form des B-C-H-Produktes angeben können. Dieser Handout schließt mit der unkommentierten Angabe einer Integral-Darstellung des B-C-H-Produktes,

$$X * Y = X + \int_0^1 g(\exp(\mathrm{ad}X) \cdot \exp(t\mathrm{ad}Y))(Y)\mathrm{d}t\,, \quad g(z) = \frac{\log(z)}{1 - \frac{1}{z}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n(n+1)}(z-1)^n\,.$$

Der entscheidende Punkt ist, dass X und Y selbst nur linear auftreten, und ansonsten nur noch Kommutator-Operationen (Lie-Klammern). Man sieht außerdem, dass die Reihenentwicklung Sinn macht, da der Eins-Element-Term sich weghebt,

$$X * Y = X + Y + \int_0^1 \mathrm{d}t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)} \left(\exp(\mathrm{ad}X) \cdot \exp(t\mathrm{ad}Y) - e\right)^n (Y)\,.$$