

VERALLGEMEINERN DES ANSATZES FÜR $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$

Bei $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ wurden Darstellungen mittels ihrer Zerlegung in Eigenräume bezüglich des diagonalisierbaren Generators H analysiert. Die korrekte Verallgemeinerung dieses Vorgehens, hier am Beispiel $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ vorgeführt, erlaubt es, jede beliebige halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} zu analysieren. Um die Allgemeinheit der Konzepte zu unterstreichen, wird im folgenden häufig \mathfrak{g} statt $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ geschrieben, explizite Rechnungen jedoch immer für das Beispiel ausgeführt. Die gute Nachricht: Hat man die verallgemeinerte Methode einmal verstanden, braucht man eigentlich keine weiteren Konzepte mehr, um andere Lie-Algebren verstehen zu können.

Setup. Die Lie-Gruppe $SL_3\mathbb{C}$ ist die Gruppe der 3×3 -Matrizen mit Determinante eins. Daher ist $\dim_{\mathbb{C}} SL_3\mathbb{C} = 8$. Die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ ist durch die spurfreien 3×3 -Matrizen gegeben. Diese sei nun wie folgt zerlegt: $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$, wobei \mathfrak{h} die sogenannte *Cartan-Unteralgebra* genannt wird, d.h. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist die maximale abelsche Unteralgebra. Man erinnere sich, dass miteinander kommutierende diagonalisierbare Matrizen simultan diagonalisierbar werden können. Die Cartan-Unteralgebra wird die Aufgabe des Elementes H bei $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ übernehmen. In unserem Beispiel gilt

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} : a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\},$$

d.h. $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = 2$. Die Dimension der Cartan-Unteralgebra wird auch als *Rang* der Lie-Algebra \mathfrak{g} bezeichnet. Die anderen beiden Unteralgebren werden aufgespannt durch die Generatoren $E_{i,j}$. Dies sind Matrizen, die nur an der Stelle, wo sich die i -te Zeile und die j -te Spalte treffen, eine eins haben, d.h. $(E_{i,j})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Damit haben wir $\mathfrak{n}_+ = \text{span}\{E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3}\}$, und $\mathfrak{n}_- = \text{span}\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{3,2}\}$.

Definitionen. Sei V eine beliebige Darstellung von \mathfrak{g} . Ein *Eigenvektor* $v \in V$ von $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist ein Vektor v , der für jedes $H \in \mathfrak{h}$ ein Eigenvektor ist:

$$H(v) = \alpha(H)v, \tag{*}$$

wobei $\alpha(H)$ ein linear von H abhängender Skalar ist, d.h. $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

Ein *Eigenwert* für die Aktion von $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist ein Element $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, so dass es ein $v \in V$ gibt, $v \neq 0$, für das (*) gilt. Ein *Eigenraum* assoziiert zu $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ ist der Unterraum V_α aller $v \in V$, für die (*) gilt.

Die entscheidende Verallgemeinerung von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ zu einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} ist der Ansatz, dass jede endlich dimensionale Darstellung V von \mathfrak{g} eine Zerlegung $V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$, wobei V_{α} Eigenraum von $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist, und α über eine endliche Untermenge von \mathfrak{h}^* läuft.

Adjungierte Darstellung. Um die Analoga von $X, Y \in \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ zu finden, beobachtet man, dass die Lie-Klammern $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ die Elemente X, Y als Eigenvektoren für die adjungierte Aktion von H auf $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ definieren. Wir betrachten daher die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, die also eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha} \right)$$

besitzt, wobei α über eine endliche Untermenge von \mathfrak{h}^* läuft, und \mathfrak{h} auf jedem Raum \mathfrak{g}_{α} durch skalare Multiplikation operiert, d.h.

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{g}_{\alpha} : [H, Y] \equiv \text{ad}(H)(Y) = \alpha(H)Y.$$

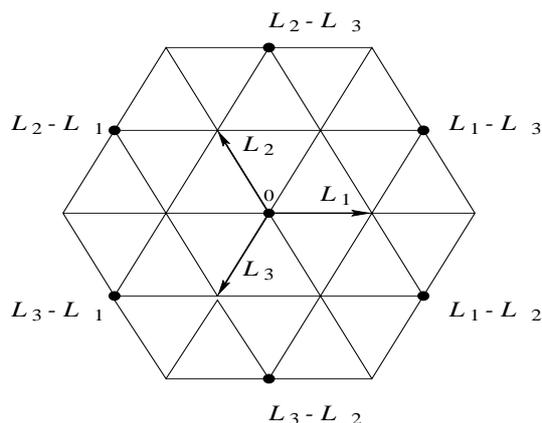
Sei M , $(M)_{kl} = m_{kl}$, eine beliebige Matrix. Ihr Kommutator mit einer Diagonalmatrix D , $(D)_{kl} = a_k\delta_{kl}$ ist $([D, M])_{kl} = (a_k - a_l)m_{kl}$. Dies soll nun für alle D ein skalares Vielfaches von M sein. Die einzige Möglichkeit dafür ist, $M = E - i, j$ zu wählen. Die Matrizen $E_{i,j}$ generieren also genau die Eigenräume für die adjungierte Aktion von \mathfrak{h} auf \mathfrak{g} . Mit obiger expliziter Definition von \mathfrak{h} für $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ ist der Dualraum definiert als

$$\mathfrak{h}^* = \text{span}_{\mathbb{C}}\{L_1, L_2, L_3\} / \{L_1 + L_2 + L_3 = 0\},$$

wobei die linearen Funktionale L_i die duale Basis zur Standardbasis der diagonalen 3×3 -Matrizen sind, d.h.

$$L_i \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_i.$$

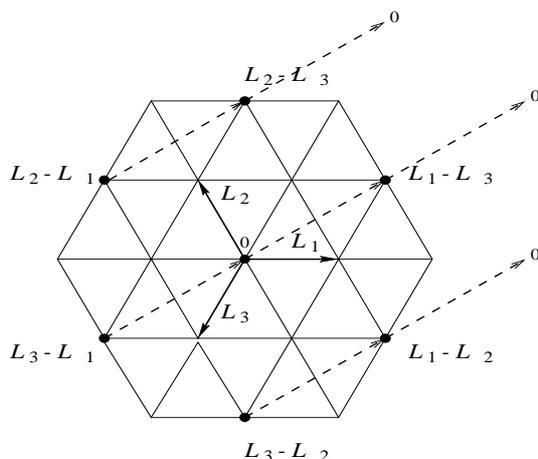
Wir folgern damit, dass die linearen Funktionale $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, die in der Zerlegung von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha})$ auftreten, die sechs Funktionale $L_i - L_j$ sind, $1 \leq i \neq j \leq 3$. Die Räume $\mathfrak{g}_{L_i - L_j}$ werden jeweils durch die Elemente $E_{i,j}$ aufgespannt.



Dieses Bild enthält so ziemlich die ganze Information der Struktur der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Sei z.B. $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$. Um herauszufinden, wohin $\text{ad}(X)$ ein $Y \in \mathfrak{g}_{\beta}$ sendet, führen wir wieder unsere *fundamentale Rechnung* für ein beliebiges $H \in \mathfrak{h}$ aus,

$$\begin{aligned} [H, [X, Y]] &= [X, [H, Y]] + [[H, X], Y] \\ &= [X, \beta(H)Y] + [\alpha(H)X, Y] \\ &= (\alpha(H) + \beta(H))[X, Y]. \end{aligned}$$

Also ist $[X, Y] = \text{ad}(X)(Y)$ wieder ein Eigenvektor von \mathfrak{h} , und zwar mit Eigenwert $\alpha + \beta$, d.h. $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha}) : \mathfrak{g}_{\beta} \rightarrow \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Da $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\alpha})$ Eigenräume in Eigenräume überführt, bleibt die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha})$ erhalten. In unserem Bild operiert jedes \mathfrak{g}_{α} durch Translation. So ist die Aktion von $\mathfrak{g}_{L_1 - L_3}$ gegeben durch $\text{ad}(\mathfrak{g}_{L_1 - L_3})(\mathfrak{g}_{L_3 - L_1}) \subset \mathfrak{h}$, $\text{ad}(\mathfrak{g}_{L_1 - L_3})(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_{L_1 - L_3}$, $\text{ad}(\mathfrak{g}_{L_1 - L_3})(\mathfrak{g}_{L_1 - L_3}) = 0$ etc., d.h.



Beliebige Darstellung. Ganz analog gilt das für jede Darstellung V von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Die Darstellung hat eine Zerlegung $V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$, und die \mathfrak{g}_{α} bilden V_{β} nach $V_{\alpha+\beta}$ ab, denn

$$\begin{aligned} H(X(v)) &= X(H(v)) + [H, X](v) \\ &= X(\beta(H)v + (\alpha(H)X)(v)) \\ &= (\alpha(H) + \beta(H))X(v). \end{aligned}$$

Wir können also auch die V_{α} durch Punkte in einem (ebenen) Diagramm darstellen, die von den \mathfrak{g}_{α} durch Translation ineinander überführt werden. Die Eigenwerte α , die in der Zerlegung einer irreduziblen Darstellung V auftreten, unterscheiden sich daher voneinander durch *ganzzahlige* Linearkombinationen der Vektoren $L_i - L_j \in \mathfrak{h}^*$. Dies motiviert einige weitere wichtige Definitionen.

Definitionen. Die *Wurzeln* (engl. roots) sind die Menge $R = \{L_i - L_j : i \neq j\}$. Die integralen Linearkombinationen spannen das *Wurzelgitter* (engl. root lattice) $\Lambda_R = \bigoplus_{L \in R} \mathbb{Z}L$ auf. Man beachte, dass mit dieser Konvention null keine Wurzel ist.

Die Eigenwerte α , die in der Zerlegung einer Darstellung $V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$ auftreten, heißen die *Gewichte* (engl. weights) der Darstellung. Die Differenzen der Gewichte einer Darstellung sind immer $\alpha - \alpha' \in \Lambda_R$. Weiter heißen

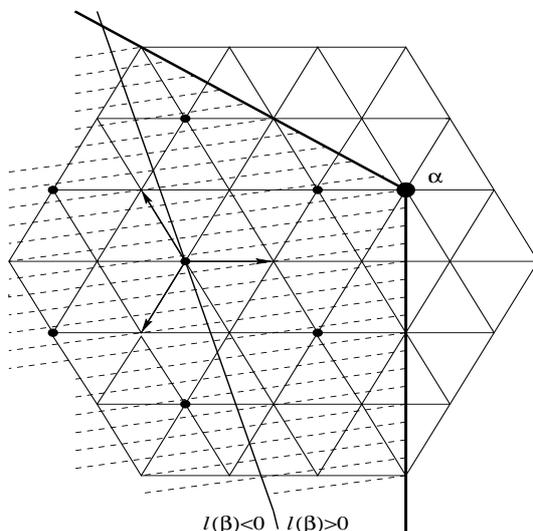
die Eigenvektoren $v \in V_\alpha$ *Gewichtsvektoren* (engl. *weight vectors*) zum Gewicht α , und die Eigenräume V_α selbst heißen *Gewichtsräume* (engl. *weight spaces*). Die Wurzeln sind also die Gewichte der adjungierten Darstellung, daher heißen die \mathfrak{g}_α auch *Wurzelräume* (engl. *root spaces*).

Höchstgewichte. In der Vorlesung wurde erklärt, dass es unter den Gewichten sogenannte *Höchstgewichte* (engl. *highest weights*) α gibt, die die Eigenschaft haben, dass es einen zugehörigen *Höchstgewichtsvektor* (engl. *highest weight vector*) $v \in V$ gibt, der von einer Hälfte aller Wurzeln annihilert wird. Also

LEMMA: $\exists v \in V : (i) \exists \alpha \in \mathfrak{h}^* : v \in V_\alpha; (ii) \forall 0 < i < j : E_{i,j}(v) = 0.$ □

Wie in der Vorlesung erklärt, ist die Halbordnung in (ii) beliebig, andere Ordnungen definieren andere Höchstgewichtsvektoren. Genauer hat man eine lineare Funktion $\ell : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$, die eingeschränkt auf die integralen Linearkombinationen der L_i reell sei. Die Wurzeln α für die $\ell(\alpha) > 0$ ist, heißen *positive Wurzeln*. Im Beispiel ist $\ell(a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3) = aa_1 + ba_2 + ca_3$ mit $a > b > c$ beliebige reelle Zahlen, so dass $\{\gamma : \ell(\gamma) = 0\}$ irrational zu Λ_R ist. Ferner definieren wir $H_{i,j} = [E_{i,j}, E_{j,i}] = E_{i,i} - E_{j,j}$. Unter den positiven Wurzeln sind diejenigen ausgezeichnet, die sich nicht als Summe anderer positiver Wurzeln schreiben lassen. Solche Wurzeln heißen *einfache* (engl. *simple*) Wurzeln. Im Beispiel sind dies $L_2 - L_3$ und $L_1 - L_2$, während $L_1 - L_3 = (L_1 - L_2) + (L_2 - L_3)$ nicht einfach ist. Weiter gilt der wichtige Sachverhalt, dass eine irreduzible Darstellung V aus einem Höchstgewichtsvektor $v \in V$ durch die Bilder von v unter sukzessiver Anwendung der $E_{j,i}, 0 < i < j$, erzeugt wird. Das hat mehrere unmittelbare Konsequenzen:

(1) Alle $\beta \in \mathfrak{h}^*$, die in der Zerlegung von V auftreten, liegen in einem Konus mit Spitze α . Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ ist dies ein $1/3$ -Konus:



(2) $\dim V_\alpha = 1$, d.h. der Höchstgewichtsvektor v ist eindeutig bis auf Normierung.

(3) $\dim V_{\alpha+n(L_2-L_1)} = \dim V_{\alpha+n(L_3-L_2)} = 1$, da diese Räume allein durch $(E_{2,1})^n(v)$ bzw. $(E_{3,2})^n(v)$ erzeugt werden. Allgemeiner gilt dies für die Räume, deren Gewichte auf dem Rand des Konus liegen.

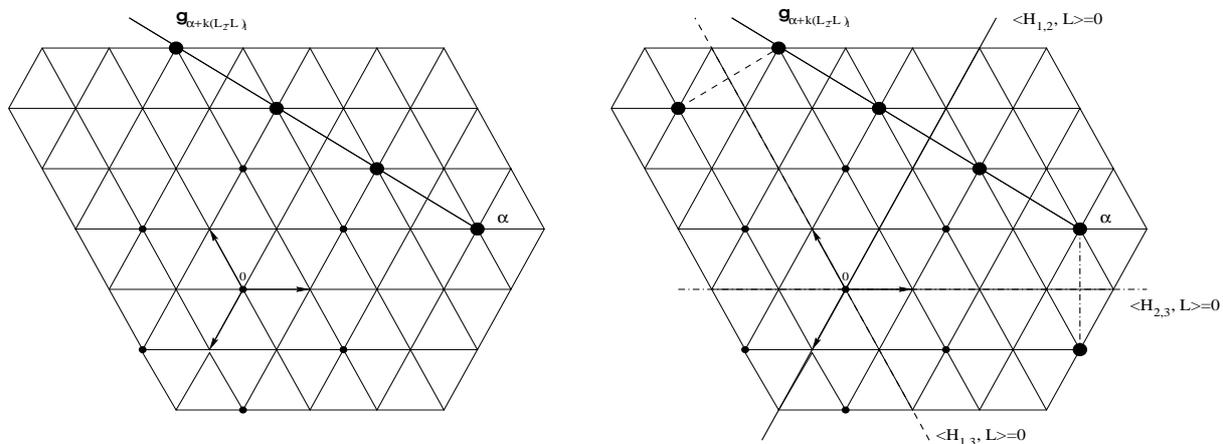
Es gilt nun auch umgekehrt, dass für eine beliebige Darstellung V und einen Höchstgewichtsvektor $v \in V$ gilt, dass die Unterdarstellung $W \subset V$, die aus den Bildern von v unter sukzessiver Anwendung von $E_{j,i}, 0 < i < j$, erzeugt wird, irreduzibel ist. In der Vorlesung wurde der Induktionsbeweis für diese Behauptungen angedeutet. Damit gilt die

PROPOSITION: Jede irreduzible Darstellung W von $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ besitzt einen (bis auf Normierung) eindeutigen Höchstgewichtsvektor. Die Menge der Höchstgewichtsvektoren einer beliebigen Darstellung V formt eine Vereinigung linearer Unterräume Ψ_W korrespondierend zu den irreduziblen Unterdarstellungen W in V , wobei $\dim \Psi_W$ die Multiplizität von W in V ist. □

Konvexe Hülle. Man beobachtet, dass $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus H_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ ist. Konkret ist $\mathfrak{s}_{L_i-L_j} = \text{span}\{E_{i,j}, H_{i,j}, E_{j,i}\}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ für $i < j$. Analysiert man Darstellungen bezüglich diesen Unteralgebren, so kann man die Bedingung $\dim V < \infty$ wie bei der Untersuchung der Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ ausnutzen. Sei zum Beispiel $\mathfrak{s}_{L_1-L_2}$ betrachtet. Es ist $W = \bigoplus_k \mathfrak{g}_{\alpha+k(L_2-L_1)}$ unter $\mathfrak{s}_{L_1-L_2}$ erhalten, also eine Darstellung von $\mathfrak{s}_{L_1-L_2} \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Also sind die Eigenwerte von $H_{1,2}$ auf W ganzzahlig und symmetrisch bezüglich null. Also muß die Reihe von Punkten in unserem Diagramm, die von α in Richtung $L_2 - L_1$ losgeht, symmetrisch bezüglich der Geraden $\langle H_{1,2}, L \rangle$ in der Ebene \mathfrak{h}^* sein. Es ist übrigens kein Zufall, dass auch in unserem Diagramm $L \perp L_1 - L_2$ ist. Die Reihe der Punkte $\mathfrak{g}_{\alpha+k(L_2-L_1)}$ ist endlich lang und invariant unter Spiegelung an der Geraden $\langle H_{1,2}, L \rangle$.

Allgemein kann man die $\mathfrak{s}_{L_i-L_j} = \text{span}\{E_{i,j}, E_{j,i}, H_{i,j} = [E_{i,j}, E_{j,i}]\} \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ betrachten, die alle Unteralgebren von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ sind. So muss auch die Reihe der Punkte $\mathfrak{g}_{\alpha+k(L_3-L_2)}$ invariant unter Spiegelung an der Geraden $\langle H_{2,3}, L \rangle = 0$ sein. Sei m die kleinste Zahl, für die $(E_{2,1})^m(v) = 0$ ist, und sei $\beta = \alpha + (m-1)(L_2 - L_1)$ und

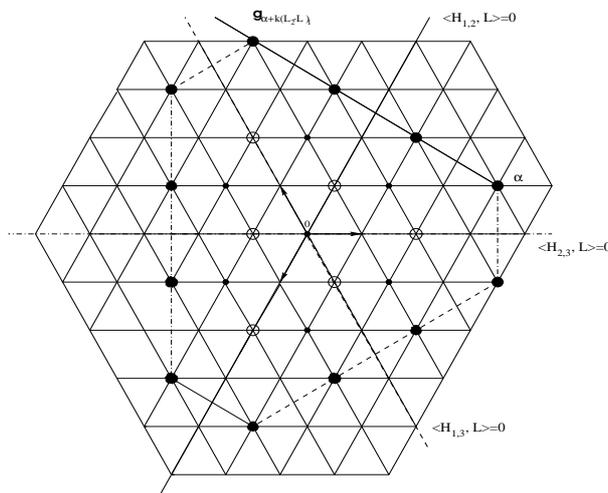
$v' \in V_\beta$. Nach Definition ist $E_{2,1}(v') = 0$, und es gibt kein V_γ oberhalb des Konus-Randes, d.h. $E_{2,3}(v') = 0$ und $E_{1,3}(v') = 0$. Also ist v' ebenfalls ein Höchstgewichtsvektor. Wir können also alles, was wir bis jetzt für α gemacht haben, auch für β durchführen. Am Ende der Reihe von Punkten $\mathfrak{g}_{\beta+k(L_3-L_1)}$ gibt es ein v'' , das wieder als Höchstgewichtsvektor aufgefasst werden kann, und von $E_{3,1}$ und $E_{2,1}$ annulliert wird. Das bisherige lässt sich in den folgenden zwei Diagrammen veranschaulichen:



Es folgt, wenn man das für alle Höchstgewichtsvektoren, die man sukzessive erhält, weiterspielt, dass die Eigenwerte, die in der Zerlegung von V auftreten, durch ein Sechseck (Hexagon) beschränkt werden, das symmetrisch unter Spiegelungen an den Geraden $\langle H_{i,j}, L \rangle = 0$ ist, und das einen Vertex bei α hat. Bemerkung: Das Sechseck kann unter Umständen zu einem Dreieck degenerieren, wenn je zwei der Eckpunkte aufeinanderfallen. Anders ausgedrückt: Das Sechseck ist die konvexe Hülle der Vereinigung der Bilder von α unter der Gruppe der Isometrien der Ebene, die durch Spiegelungen an den Geraden $\langle H_{i,j}, L \rangle = 0$ erzeugt wird. Da $\mathfrak{sl}_{L_i-L_j} \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, sind die Eigenwerte von $H_{i,j} \in \mathbb{Z}$ und daher gilt, dass die $\alpha \in \bigoplus_i \mathbb{Z}L_i = \Lambda_W$ sind. Λ_W heißt *Gewichtsgitter* (engl. *weight lattice*). Wir erhalten die

PROPOSITION: Alle Eigenwerte einer irreduziblen endlich dimensionalen Darstellung V von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ müßen im Gitter $\Lambda_W \subset \mathfrak{h}^*$ liegen, das von den L_i aufgespannt wird. Weiter müßen alle Gewichte der Darstellung zueinander kongruent modulo dem Gitter $\Lambda_R \subset \mathfrak{h}^*$ sein, das von der Wurzeln $L_i - L_j$ aufgespannt wird. \square

Man beachte, dass $\Lambda_W/\Lambda_R = \mathbb{Z}/3$ für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ ist, während für $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ natürlich $\Lambda_W/\Lambda_R = \mathbb{Z}/2$ gilt. Dies ergibt das folgende Diagramm:



Beachtet man schließlich noch, dass die Räume $W_{\alpha,i,j} = \bigoplus_k \mathfrak{g}_{\alpha+k(L_i-L_j)}$ nicht die einzigen unter $\mathfrak{sl}_{L_i-L_j}$ invarianten Unterräume sind, sondern vielmehr für ein $\beta \in \mathfrak{h}^*$, das Eigenwert der Zerlegung $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$ ist, und für alle $i \neq j$ auch $W_{\beta,i,j} = \bigoplus_k \mathfrak{g}_{\beta+k(L_i-L_j)}$ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}_{L_i-L_j}$ formt (die allerdings nicht notwendig irreduzibel ist), so folgert man, dass zumindest die k , für die $V_{\beta+k(L_i-L_j)} \neq 0$ ist, eine ungebrochene Sequenz ganzer Zahlen bilden. Damit gehören also auch alle Punkte im Innern der konvexen Hülle, die Elemente von Λ_W/Λ_R sind, zu den erlaubten Eigenwerten. Diese sind in obigem Diagramm durch offene Kreise markiert. Eine Höchstgewichtsdarstellung lässt sich also dadurch diagrammatisch verstehen, dass man im Gitter Λ_W das Höchstgewicht einzeichnet, anschließend die konvexe Hülle konstruiert, und dann alle Gewichte markiert, die innerhalb der konvexen Hülle und auf Λ_W/Λ_R liegen. Wir fassen zusammen:

PROPOSITION: Sei V eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Dann gibt es ein $\alpha \in \Lambda_W \subset \mathfrak{h}^*$, so dass die Menge der Gewichte, die in der Zerlegung $V = \bigoplus_{\beta} V_{\beta}$ auftreten, genau die Menge der linearen Funktionale kongruent zu α modulo Λ_R ist, die durch die konvexe Hülle beschränkt wird, deren Ecken durch die Bilder von α unter der Spiegelungsgruppe gegeben sind, die durch die Spiegelungen an den Geraden $\langle H_{i,j}, L \rangle = 0$ erzeugt wird. \square

EXPLIZITE KONSTRUKTION IRREDUZIBLER DARSTELLUNGEN VON $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$

Um ein vollständiges Verständnis der Darstellungen von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ zu haben, müssen wir zunächst Existenz und Eindeutigkeit der irreduziblen Darstellungen zeigen. Wünschenswert wäre eine ähnlich explizite Konstruktion, wie im Fall $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, wo jede irreduzible Darstellung sich als symmetrisches Tensorprodukt $\text{Sym}^n V$ der Standarddarstellung für ein $n \in \mathbb{Z}_+$ schreiben ließ. Schließlich braucht man für die Analyse von Tensorprodukten natürlich nicht nur die Gewichte der Darstellungen, sondern auch die Multiplizitäten, mit denen sie auftreten.

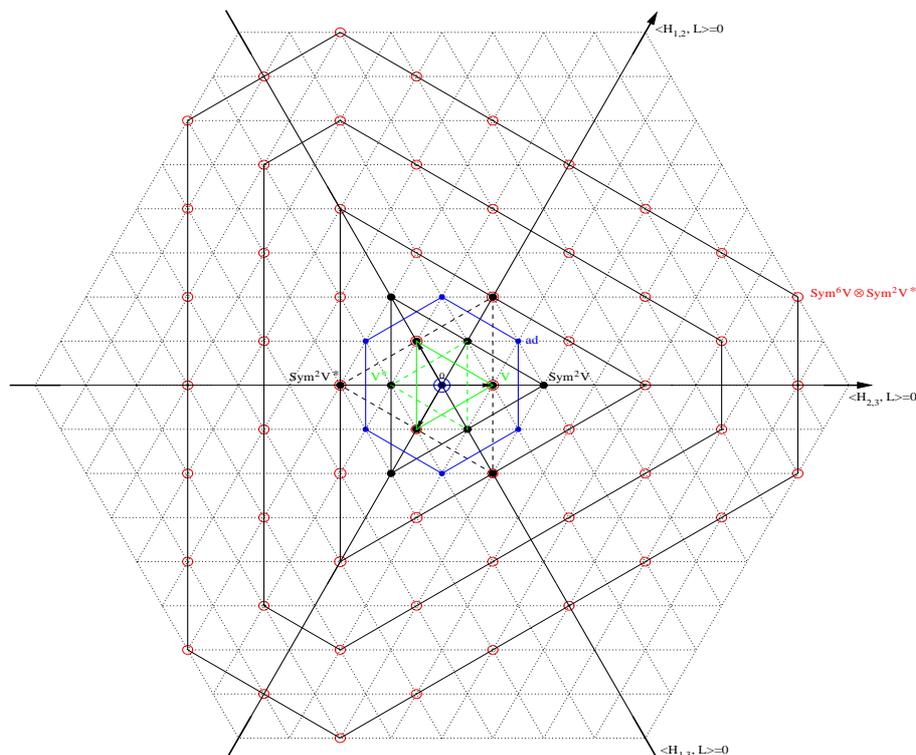
Elementare Beispiele. Die Standarddarstellung von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ ist natürlich nichts anderes als $V \cong \mathbb{C}^3$. Die Eigenvektoren der Aktion von \mathfrak{h} sind natürlich die Standard-Basisvektoren e_1, e_2, e_3 mit Eigenwerten L_1, L_2, L_3 .

Da die Eigenwerte des Dualen einer Darstellung einer Lie-Algebra einfach das Negative der Eigenwerte der originalen Darstellung sind, erhalten wir sofort, dass $V^* \cong \mathbb{C}^3$ mit der dualen Standardbasis e_1^*, e_2^*, e_3^* die Eigenwerte $-L_1, -L_2, -L_3$ hat. Die Darstellungen V und V^* werden übrigens durch den Automorphismus $X \mapsto -{}^t X$ von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ ineinander überführt. Weiter ist V^* isomorph zu $\bigwedge^2 V$, dessen Gewichte gerade die paarweisen Summen unterschiedlicher Gewichte von V sind, und umgekehrt ist $V \cong \bigwedge^2 V^*$.

Wir kennen auch schon die adjungierte Darstellung. Sie hat insgesamt acht Gewichte, nämlich $L_i - L_j$ für $i \neq j$, sowie das Gewicht null mit Multiplizität zwei (da $\dim \mathfrak{h} = 2$).

Als nächstes betrachten wir $\text{Sym}^2 V$, $\text{Sym}^2 V^*$ und $V \otimes V^*$. Die Gewichte symmetrischer Tensorprodukte sind gegeben durch die Summen der Gewichte der originalen Darstellung. Also hat $\text{Sym}^2 V^*$ die Gewichte $\{-2L_k, -L_i - L_j : 0 < i < j\} = \{-2L_i - 2L_j, L_k : 0 < i < j\}$. Die Gewichte des Tensorproduktes $V \otimes V^*$ sind die Summen der jeweiligen Gewichte, was auf die Menge $\{L_i - L_j\}$ herausläuft. Diese enthält dreimal das Element null. $V \otimes V^*$ ist nicht irreduzibel, sondern direkte Summe der adjungierten und der trivialen Darstellung. Die Gewichtsvektoren sind $e_i \otimes e_j^*$, wobei die drei Gewichtsvektoren $e_i \otimes e_i^*$ zum dem dreifach auftretenden Gewicht null gehören. Allgemeiner gilt, dass für jede treue Darstellung W das Tensorprodukt $W \otimes W^*$ die adjungierte Darstellung enthält.

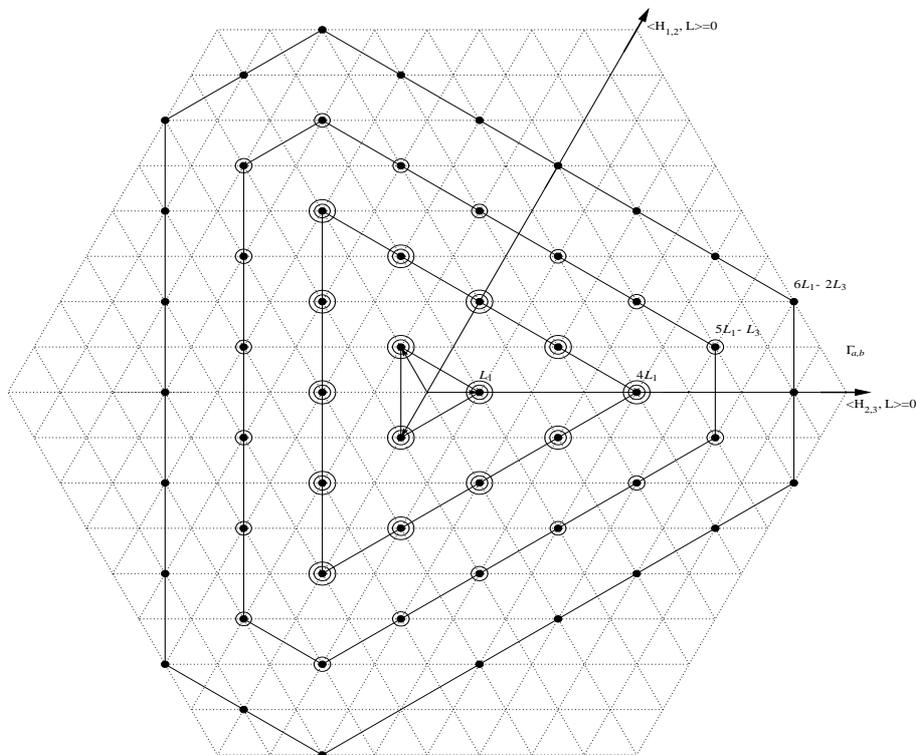
Irreduzible Darstellungen. Aus unserer bisherigen Betrachtung der Gewichte von Darstellungen von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ folgt, dass jeder Höchstgewichtsvektor in der $(\frac{1}{6})$ -Ebene liegen muß, die durch die Ungleichungen $\langle H_{1,2}, L \rangle \geq 0$ und $\langle H_{2,3}, L \rangle \geq 0$ beschrieben wird. Also hat ein Höchstgewichtsvektor zwingend die Form $v = (a + b)L_1 + bL_2 = aL_1 - bL_3$ für zwei nicht negative Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Unsere bisherige Konstruktion liefert also den folgenden Satz:



THEOREM: Für jedes Paar nicht negativer ganzer Zahlen a, b existiert eine eindeutige irreduzible endlich dimensionale Darstellung $\Gamma_{a,b}$ von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ mit Höchstgewichtsvektor $v = aL_1 - bL_3$. \square

Man kann zeigen, dass $\Gamma_{a,b} \subset \text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b V^*$ ist. Genauer gilt, dass $\Gamma_{a,b} = \text{Ker}(\iota_{a,b})$ mit $\iota_{a,b} : \text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b V^* \rightarrow \text{Sym}^{a-1} V \otimes \text{Sym}^{b-1} V^*$ eine Abbildung, die die Kontraktion $(v_1 \cdot \dots \cdot v_a) \otimes (v_1^* \cdot \dots \cdot v_b^*) \mapsto \sum_{i,j} \langle v_i, v_j^* \rangle (v_1 \cdot \dots \cdot v_{i-1} \cdot v_{i+1} \cdot \dots \cdot v_a) \otimes (v_1^* \cdot \dots \cdot v_{j-1}^* \cdot v_{j+1}^* \cdot \dots \cdot v_b^*)$ ausführt.

In obigem Diagramm sind die bisherigen Beispiele zusammengefaßt. V und V^* sind grün, deren jeweilige symmetrischen Tensorprodukte schwarz gekennzeichnet. Die adjungierte Darstellung ist blau, und das Tensorprodukt $\text{Sym}^6 V \otimes \text{Sym}^2 V^*$ ist rot eingetragen. Das Gewichtsdiagramm von $\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b V^*$ oder äquivalent dazu von $\Gamma_{a,b}$ wird am Beispiel von $\text{Sym}^6 V \otimes \text{Sym}^2 V^*$ gezeigt. Die auftretenden Höchstgewichte sind von außen nach innen $6L_1 - 2L_3, 5L_1 - L_3, 4L_1$ und schließlich L_1 . Allgemein hat man im Fall $a \geq b$ zunächst eine Sequenz konzentrischer (nicht notwendig regulärer) Sechsecke mit Eckpunkten $(a-i)L_1 - (b-i)L_3, i = 0, 1, \dots, b-1$, gefolgt von einer Sequenz von Dreiecken (nachdem die kürzere der Seiten des Sechsecks zu null geschrumpft ist) mit Eckpunkten $(a-b-3j)L_1, j = 0, 1, \dots, [\frac{1}{3}(a-b)]$. Der letzte Ausdruck meint die Gaussklammer. Die Multiplizitäten für die Sechsecke H_i und die Dreiecke T_j (man beachte, dass $T_0 = H_b$ ist) sind für $\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b V^*$ wie folgt gegeben: $\text{mult}(H_i) = \frac{1}{2}(i+1)(i+2)$ und $\text{mult}(T_j) = \frac{1}{2}(b+1)(b+2)$. Die Multiplizitäten für $\Gamma_{a,b}$ hingegen sind $\text{mult}(H_i) = (i+1)$ und $\text{mult}(T_j) = b$. Anders ausgedrückt, steigen die Multiplizitäten für $\Gamma_{a,b}$ von außen nach innen, beginnend mit eins, je um eins an, bis die Sequenz der Dreiecke nach $b-1$ Schritten erreicht ist. Von da an bleibt die Multiplizität für alle weiteren Dreiecke beim Wert b . Im folgenden Diagramm sind die Multiplizitäten für die Darstellung $\Gamma_{6,2}$ durch multiple Kreise angedeutet. Offensichtlich ist das keine sehr effektive Art, Darstellungen graphisch zu verdeutlichen, und in der Tat gibt es wesentlich bessere Methoden ...



Die Zerlegung einer beliebigen Darstellung U in irreduzible Darstellungen $\Gamma_{a,b}$ findet man wie folgt:

- (1) Man schreibe die Zerlegung von U in Eigenwerte, d.h. Gewichte $U = \bigoplus_{\beta} U_{\beta}$ hin.
- (2) Man finde das Gewicht $\alpha = aL_1 - bL_3$, das in der Zerlegung auftritt, für das $\ell(\alpha)$ maximal wird.
- (3) Also muß U eine Kopie der irreduziblen Darstellung $\Gamma_{\alpha} = \Gamma_{a,b}$ enthalten, d.h. $U \cong \Gamma_{\alpha} \oplus U'$ für ein U' . Das Gewichtsdiagramm von Γ_{α} kennt man, womit man dasjenige von U' erhält.
- (4) Man wiederhole die Prozedur für U' .

Als Übungsaufgabe kann man versuchen, auf diese Weise das Tensorprodukt $U = \Gamma_{2,1} \otimes V$ in irreduzible Darstellungen zu zerlegen. Die Lösung ist $U \cong \Gamma_{3,1} \oplus \Gamma_{1,2} \oplus \Gamma_{2,0}$. Mit der weiter oben beschriebenen Abbildung $\iota_{a,b}$ kann man zum Beispiel allgemein zeigen, dass für $b \leq a$

$$\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b V^* = \bigoplus_{i=1}^b \Gamma_{a-i, b-i}$$

gilt. Insbesondere ist also $\Gamma_{n,0} = \text{Sym}^n V$ und $\Gamma_{0,n} = \text{Sym}^n V^*$.