

IRREDUZIBLE DARSTELLUNGEN EINER HALBEINFACHEN LIE-ALGEBRA

Die Methode, mit der die irreduziblen, endlich dimensionalen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$  gefunden wurden, läßt sich unmittelbar auf jede halbeinfache Lie-Algebra übertragen. Das ergibt eine Prozedur in acht Schritten, die hier kurz skizziert sei. Die halbeinfache Lie-Algebra sei mit  $\mathfrak{g}$  bezeichnet.

- [I] **Cartan Untereralgebra.** Man finde die maximale abelsche Untereralgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ .
- [II] **Cartan-Zerlegung.** Man führe für die adjungierte Darstellung die Cartan-Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha\right)$  durch, wobei die *Wurzelräume*  $\mathfrak{g}_\alpha$  definiert sind durch die Bedingung

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{g}_\alpha : \text{ad}(H)(X) = \alpha(H) X$$

für  $\alpha \in R \subset \mathfrak{h}^*$ , der Menge der *Wurzeln* von  $\mathfrak{g}$ . Es gilt:

- (1)  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ ;
- (2)  $\text{rang } \mathfrak{g} \equiv \text{rang } \Lambda_R = \dim \mathfrak{h}$  mit  $\Lambda_R = \text{span}_{\mathbb{Z}} R$  dem *Wurzelgitter*;
- (3)  $\alpha \in R \iff -\alpha \in R$ .

Sei  $V$  eine endlich dimensionale irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Man führe analog die Cartan-Zerlegung für  $V$  durch, d.h.  $V = \bigoplus_{\alpha \in W(V)} V_\alpha$ , wobei die *Gewichtsräume*  $V_\alpha$  definiert sind durch die Bedingung

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \forall v \in V_\alpha : H(v) = \alpha(H) v$$

für  $\alpha \in W(V) \subset \mathfrak{h}^*$ , der Menge der *Gewichte* der Darstellung  $V$ . Es gilt:

- (1)  $\dim V_\alpha = \text{mult}(\alpha)$  in der Darstellung  $V$ ;
- (2) die Wurzelräume operieren auf den  $V_\alpha$  so, dass  $\mathfrak{g}_\beta : V_\alpha \rightarrow V_{\alpha+\beta}$  für alle  $\beta \in R$ . Damit gilt offensichtlich, dass  $\forall \alpha, \alpha' \in W(V) : \alpha - \alpha' \in \Lambda_R$ .

- [III] **Wurzel-Untereralgebren.** Man finde für jede Wurzel  $\alpha$  die zugehörige Untereralgebra  $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ . Es gilt:

- (1)  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$ , so dass  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$ ,  $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ ;
- (2)  $[[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}], \mathfrak{g}_\alpha] \neq 0$ , so dass man Generatoren finden kann, die die Standard-Lie-Klammern von  $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$  erfüllen. Insbesondere gibt es ein  $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  mit  $\alpha(H_\alpha) = 2$ .

- [IV] **Gewichts-Gitter.** Man nutze nun die relativ einfache Darstellungs-Theorie für die  $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$  aus und konstruiere das Gitter  $\Lambda_W = \{\beta \in \mathfrak{h}^* : \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in R\}$ , da die Eigenwerte von  $H_\alpha$  alle ganzzahlig sein müssen. Offensichtlich ist dann für jede irreduzible endlich dimensionale Darstellung  $V$  die Menge der Gewichte  $W(V) \subset \Lambda_W$ . Insbesondere ist auch  $R \subset \Lambda_W$ , also ist  $\Lambda_R \subset \Lambda_W$  ein Untergitter mit endlichem Index.

- [V] **Weyl-Gruppe.** Man mache sich zunutze, dass die Gewichte von Darstellungen von  $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$  eine Reflektions-Symmetrie aufweisen, indem man Reflektionen  $W_\alpha$  einführt,

$$W_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} \alpha = \beta - \beta(H_\alpha) \alpha,$$

die die Hyperebenen  $\Omega_\alpha = \{\beta \in \mathfrak{h}^* : \langle H_\alpha, \beta \rangle = 0\}$  in sich überführen, und die Geraden  $\mathbb{C}\alpha$  in sich spiegeln, d.h.  $W_\alpha(\alpha) = -\alpha$ . Die aus den  $W_\alpha, \alpha \in R$ , erzeugte Gruppe  $\mathfrak{W}$  heißt *Weyl-Gruppe*. Insbesondere gilt, dass die Menge der Gewichte einer Darstellung invariant unter der Weyl-Gruppe ist, d.h.  $\mathfrak{W}(W(V)) = W(V)$ .

- [VI] **Killing-Form.** Man führe die Killing-Form  $g(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$  als Skalarprodukt auf  $\mathfrak{g}$  ein, also auch auf  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , also auch auf  $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$ . Die Weyl-Gruppe ist dann nichts anderes als die orthogonale Gruppe,  $\mathfrak{W} = O(\Lambda_W)$ , d.h.  $g(W_\alpha(\beta), W_\alpha(\beta')) = g(\beta, \beta')$  für alle  $W_\alpha \in \mathfrak{W}, \beta, \beta' \in \Lambda_W \subset \mathfrak{h}^*$ . Bezüglich dieses Skalarproduktes sind die Gerade  $\mathbb{C}\alpha$  und die Hyperebene  $\Omega_\alpha$  orthogonal, d.h.  $\alpha \perp \Omega_\alpha$ . Das Skalarprodukt  $g(\cdot, \cdot)$  ist positiv definit auf  $\mathfrak{h}$ .

- [VII] **Höchstgewichte und Höchstgewichtsvektoren.** Man zeichne eine Richtung in  $\mathfrak{h}^*$  aus, indem man ein reelles lineares Funktional  $\ell : \Lambda_R \rightarrow \mathbb{R}$  einführt, das die Wurzeln in zwei gleichgroße Teilmengen  $R = R^+ \cup R^-$  teilt. Dabei ist  $R^+ = \{\alpha \in R : \ell(\alpha) > 0\}$  die Menge der *positiven Wurzeln*, und analog  $R^- = \{\alpha \in R : \ell(\alpha) < 0\}$  die Menge der *negativen Wurzeln*. Für eine Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  heißt ein Vektor  $v \in V$ , der sowohl Eigenvektor für alle  $H \in \mathfrak{h}$  ist, als auch im Kern aller Wurzelräume der positiven Wurzeln liegt, *Höchstgewichtsvektor*, d.h.  $v \in V$

ist Höchstgewichtsvektor mit *Höchstgewicht* bzw. *dominantem Gewicht*  $\alpha \iff H(v) = \alpha(H)v$  für alle  $H \in \mathfrak{h}$ , und  $\mathfrak{g}_\alpha(v) = 0$  für alle  $\alpha \in R^+$ . Es gilt:

- (1) Jede endlich dimensionale Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  besitzt einen Höchstgewichtsvektor;
- (2) Zu jeder endlich dimensionalen Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  mit Höchstgewichtsvektor  $v \in V$  ist die Unterdarstellung  $W = \text{span}\{v, \mathfrak{g}_\alpha(v), \mathfrak{g}_\alpha \mathfrak{g}_{\alpha'}(v), \dots : \alpha, \alpha', \dots \in R^-\} \subset V$  irreduzibel;
- (3) Jede irreduzible endlich dimensionale Darstellung  $V$  von  $\mathfrak{g}$  hat einen bis auf Normierung eindeutigen Höchstgewichtsvektor.

Die sogenannten (positiven) *primitiven* oder *einfachen Wurzeln* sind diejenigen positiven Wurzeln, die sich nicht als Summe zweier anderer positiver Wurzeln schreiben lassen, d.h.  $R_p^+ = \{\alpha \in R^+ : \alpha \neq \alpha' + \alpha'' \text{ für } \alpha', \alpha'' \in R^+\}$ . Analog definiert man negative einfache Wurzeln  $R_p^-$ . Man kann dann obige Definition von  $W \subset V$  vereinfachen zu  $W = \text{span}\{v, \mathfrak{g}_\alpha(v), \mathfrak{g}_\alpha \mathfrak{g}_{\alpha'}(v), \dots : \alpha, \alpha', \dots \in R_p^-\}$ .

Die (*abgeschlossene*) *Weyl-Kammer*  $\mathcal{W}$  ist der Bereich in  $\mathfrak{h}^*$ , innerhalb dessen alle möglichen Höchstgewichte liegen müssen. Sie ist definiert als  $\mathcal{W} = \{\alpha \in \text{span}_{\mathbb{R}} R : \alpha(H_\gamma) \geq 0 \forall \gamma \in R^+\}$ . Sie kann äquivalent dazu definiert werden als der Abschluß einer Zusammenhangskomponente des Komplements der Vereinigung der Hyperebenen  $\Omega_\alpha$ .

**[IIX] Klassifikation irreduzibler Darstellungen.** Damit hat man alles zusammen, um sämtliche endlich dimensional irreduziblen Darstellungen einer halbeinfachen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  angeben zu können.

SATZ: Für jedes  $\alpha \in \mathcal{W} \cap \Lambda_W$  gibt es genau eine irreduzible endlich dimensionale Darstellung  $\Gamma_\alpha$  mit  $\alpha$  ihrem Höchstgewicht. Bezeichne  $\mathcal{C}$  den Abschluß des Inneren der konvexen Hülle, deren Vertices von den Bildern von  $\alpha$  unter der Aktion der Weyl-Gruppe  $\mathfrak{W}$  gebildet werden. Dann ist die Menge der Gewichte der Darstellung  $\Gamma_\alpha$  gegeben durch  $W(\Gamma_\alpha) = \{\beta \in \Lambda_W \cap \mathcal{C} : \beta - \alpha \in \Lambda_R\}$ . Seien die positiven einfachen Wurzeln beliebig numeriert als  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = R_p^+$ ,  $n = \text{rang } \mathfrak{g}$ . Dann gibt es Gewichte  $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ ,  $1 \leq i \leq n$ , so dass  $\omega_i(H_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$ . Diese Gewichte heißen *fundamentale Gewichte*. Jedes Höchstgewicht ist durch eine eindeutige Linearkombination  $\alpha = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$  gegeben, wobei alle  $a_i \in \mathbb{Z}_+$ . Man schreibt daher auch oft  $\Gamma_\alpha = \Gamma_{a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n} = \Gamma_{a_1, \dots, a_n}$ .

#### DYNKIN-DIAGRAMME

Es ist für  $\text{rang } \mathfrak{g} > 2$  nicht mehr gut möglich, explizit Gewichts-Diagramme zu zeichnen. Glücklicherweise gibt es eine sehr viel effizientere Art, Darstellungen graphisch zu notieren. Diese wurde maßgeblich von Dynkin entwickelt. Hier soll kurz vorgestellt werden, wie man durch eine graphische Notation alle (halb-)einfachen Lie-Algebren sehr schnell klassifizieren kann, nämlich durch die Dynkin-Diagramme. Diese graphische Notation enthält die gesamte Information über die Lie-Algebra, und wenn man noch die Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ ,  $a_i = g(\alpha, \alpha_i)$ , hinzufügt, auch die gesamte Information über die Darstellung  $\Gamma_\alpha$ . (Notationen wie in [IIX].)

**Wurzelsysteme.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halb-einfache Lie-Algebra,  $\mathfrak{h}$  ihre Cartan-Unteralgebra,  $g$  ihre Killing-Form, etc. Der euklidische Raum  $\mathbb{E} = \text{span}_{\mathbb{R}} R$  ist ein reeller Untervektorraum von  $\mathfrak{h}^*$ , auf dem  $g$  positiv definit ist. Um eine Lie-Algebra charakterisieren zu können genügt es, die möglichen Wurzelsysteme  $R \subset \mathbb{E}$  bis auf Rotationen und skalare Multiplikationen zu klassifizieren. Ein Wurzelsystem hat die Eigenschaften

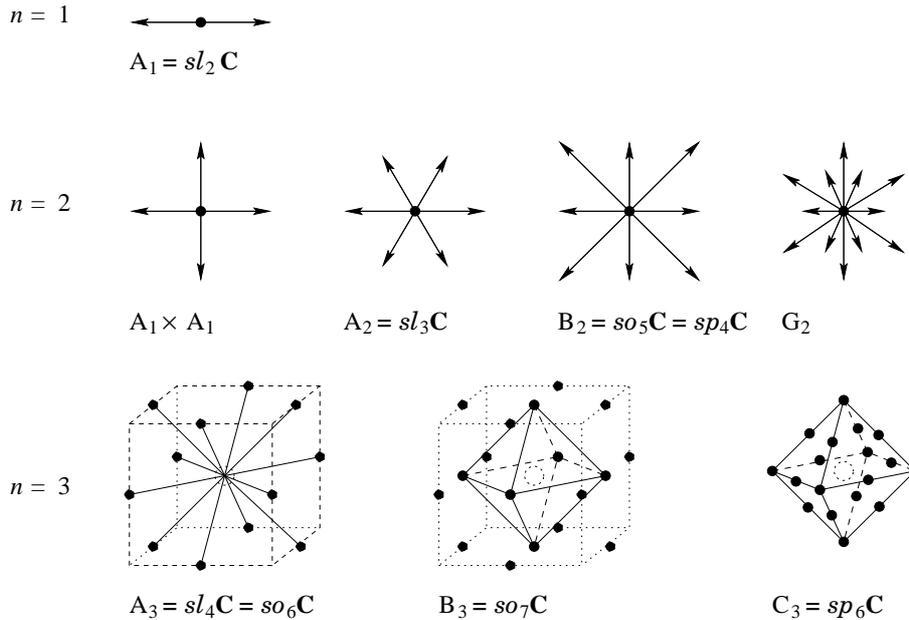
- [i]  $|R| < \infty$ ,  $\text{span}_{\mathbb{R}} R = \mathbb{E}$ ;
- [ii]  $\alpha \in R \implies -\alpha \in R$ , und strikter  $\alpha \in R \implies R \cap \{\mathbb{R}\alpha\} = \{\alpha, -\alpha\}$ ;
- [iii]  $\alpha \in R \implies W_\alpha : R \rightarrow R$  mit  $W_\alpha$  der Reflektion in der  $\alpha^\perp$ -Ebene;
- [iv]  $\alpha, \beta \in R \implies \eta_{\beta\alpha} = \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ . Die Größe  $\eta_{\beta\alpha}$  und die Weyl-Spiegelung  $W_\alpha$  können durch die Killing-Form ausgedrückt werden,

$$\eta_{\beta\alpha} = 2 \frac{g(\beta, \alpha)}{g(\alpha, \alpha)}, \quad W_\alpha(\beta) = \beta - \eta_{\beta\alpha} \alpha.$$

Bedingung [iv] ist sehr strikt, da sie den Winkel  $\theta$  zwischen zwei Wurzeln  $\alpha, \beta$  auf wenige Möglichkeiten einschränkt. Mit  $\cos \theta = g(\beta, \alpha) / \sqrt{g(\alpha, \alpha)g(\beta, \beta)}$  folgt, dass  $\eta_{\beta\alpha} = 2\sqrt{g(\beta, \beta)}/\sqrt{g(\alpha, \alpha)} \cos \theta \in \mathbb{Z}$ , also  $4 \cos^2 \theta = \eta_{\alpha\beta} \eta_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$  sein muß. Das läßt nur die Möglichkeiten  $4 \cos^2 \theta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  zu, wobei die letzte Möglichkeit,  $4 \cos^2 \theta = 4$  nur beim trivialen Fall  $\beta = \pm\alpha$  auftritt. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass  $g(\beta, \beta) \geq g(\alpha, \alpha)$  bzw.  $|\eta_{\beta\alpha}| \geq |\eta_{\alpha\beta}|$  ist. Dies führt auf folgende Tabelle an nicht-trivialen Möglichkeiten:

$4 \cos^2 \theta$	3	2	1	0	1	2	3
$\cos \theta$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$
$\theta$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
$\eta_{\beta\alpha}$	3	2	1	0	-1	-2	-3
$\eta_{\alpha\beta}$	1	1	1	0	-1	-1	-1
$\sqrt{\frac{g(\beta, \beta)}{g(\alpha, \alpha)}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	*	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Sei nun  $n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{E} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \text{rangg}$ . Im folgenden sind alle Wurzelsysteme für  $1 \leq n \leq 3$  skizziert.



Mit einer geeigneten, aber ansonsten beliebigen Halbordnung  $\ell : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  werden die Wurzeln geteilt in  $R = R^+ \cup R^-$ . Für die klassischen Lie-Algebren lassen sich die positiven einfachen Wurzeln durch die Basis-Gewichte  $L_i$  wie folgt ausdrücken:

$$R_p^+ = \begin{cases} \{L_i - L_{i+1} : i = 1, \dots, n\} & \text{für } \mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C} = A_n, \\ \{L_i - L_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{L_n\} & \text{für } \mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C} = B_n, \\ \{L_i - L_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{2L_n\} & \text{für } \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C} = C_n, \\ \{L_i - L_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{L_{n-1} + L_n\} & \text{für } \mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C} = D_n. \end{cases}$$

Die Eigenschaften [i] bis [iv] haben unmittelbare Konsequenzen, die Wurzelsysteme  $R$  erfüllen müssen.

[v] Für alle  $\alpha, \beta \in R$ ,  $\beta \neq \pm\alpha$ , muß auch die gesamte Reihe  $\{\beta - p\alpha, \beta - (p-1)\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + q\alpha\} \subset R$  zum Wurzelsystem gehören. Da aber auch  $W_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - p\alpha = (\beta - \eta_{\beta\alpha}\alpha) - q\alpha$  gelten muß, folgt, dass  $p = \eta_{\beta\alpha} + q$  ist. Dies liefert die Einschränkung  $p + q \leq 3$ ,  $p - q = \eta_{\beta\alpha}$ .

[vi] Für alle  $\alpha, \beta \in R$ ,  $\beta \neq \pm\alpha$ , folgt mit der Killing-Form, dass

$$\begin{aligned} g(\beta, \alpha) > 0 &\implies \alpha - \beta \in R, \\ g(\beta, \alpha) < 0 &\implies \alpha + \beta \in R, \\ g(\beta, \alpha) = 0 &\implies \alpha - \beta, \alpha + \beta \text{ entweder beide } \in R \text{ oder beide } \notin R; \end{aligned}$$

[vii] sind  $\alpha \neq \beta \in R_p^+$  einfache positive Wurzeln, so können  $\alpha - \beta \notin R$ ,  $\beta - \alpha \notin R$  keine Wurzeln sein;

[iix] sind  $\alpha \neq \beta \in R_p^+$  einfache positive Wurzeln, so kann der von ihnen gebildete Winkel nicht spitz sein, d.h.

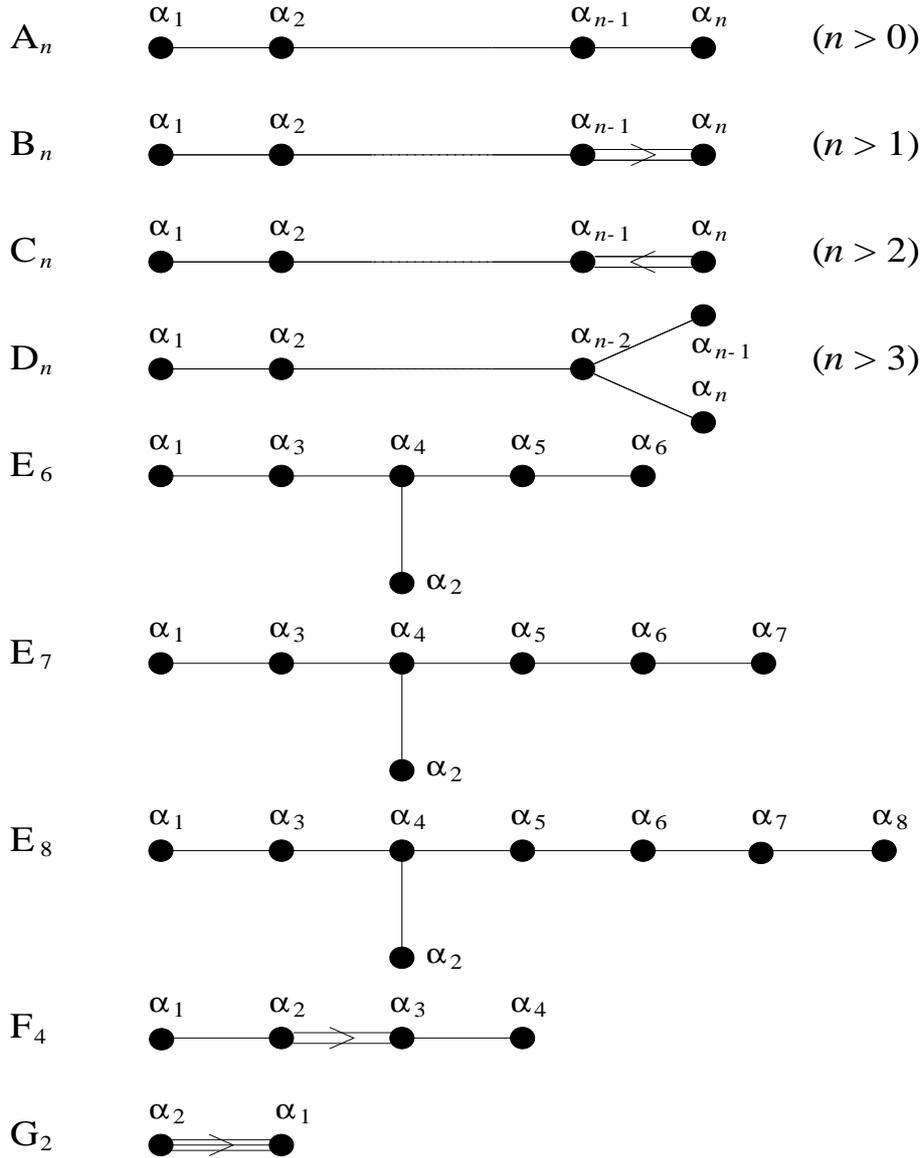
$$\cos \theta = \sqrt{g(\alpha, \alpha)/g(\beta, \beta)} \eta_{\beta\alpha} / 2 \leq 0;$$

[ix] die einfachen positiven Wurzeln sind linear unabhängig;

[x]  $|R_p^+| = n = \text{rangg}$ , so dass jedes  $\alpha \in R^+$  eine eindeutige Zerlegung  $\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$  besitzt, wobei die  $\alpha_i \in R_p^+$  und  $a_i \in \mathbb{Z}_+$  sind.

**Dynkin-Diagramme.** Seien die positiven einfachen Wurzeln beliebig nummeriert,  $R_p^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Aus [iix] folgt, dass  $\alpha_i, \alpha_j \in R_p^+$  nur die Winkel  $\theta \in \{\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6\}$  formen können. Entsprechend nimmt  $\eta_{\alpha_i, \alpha_j}$  die Werte  $\{0, -1, -2, -3\}$  an. Man zeichne nun einen Graphen mit je einem Knoten für ein  $\alpha_i$ , und mit genau  $-\eta_{\alpha_i, \alpha_j}$  Linien zwischen den Knoten  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$ . Zur Verschönerung gebe man den Verbindungslinien eine Pfeilrichtung von der längeren zur kürzeren Wurzel, falls  $g(\alpha_i, \alpha_i) \neq g(\alpha_j, \alpha_j)$  ist. Man kann nun beweisen, dass nur genau die unten skizzierten zusammenhängenden Graphen zu irreduziblen Wurzelsystemen korrespondieren, die die Eigenschaften [i] bis [iv] (und damit bis [x]) erfüllen. Dies sind die *Dynkin-Diagramme* der einfachen Lie-Algebren. Damit sind alle halb-einfachen Lie-Algebren klassifiziert! Mehr noch, auch jede irreduzible Darstellung  $\Gamma_\alpha = \Gamma_{a_1, a_2, \dots, a_n}$  kann vollständig durch ein Dynkin-Diagramm charakterisiert werden, indem man lediglich an den Knoten  $\alpha_i$  die ganze Zahl  $a_i$  schreibt. Diese Koeffizienten  $a_i$  ergaben sich ja durch Einführen der fundamentalen Wurzeln  $\omega_i$  mit  $g(\omega_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$ , so dass offensichtlich  $a_i = g(\alpha, \alpha_i)$  ist. In der Tat kann jede irreduzible Darstellung, d.h. ihr Gewichts-Diagramm nebst aller Multiplizitäten, aus dem Dynkin-Diagramm der zugrundeliegenden Lie-Algebra zusammen mit den Gewichts-Koeffizienten  $a_i$  rekonstruiert werden. Das Dynkin-Diagramm

enthält zum Beispiel alle Werte der sogenannten *Cartan-Matrix*  $n_{i,j} \equiv \eta_{\alpha_i, \alpha_j}$ . Die Nummerierung in den Diagrammen folgt von links nach rechts den Listen für  $R_p^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , die im Text angegeben sind.



Abschließend seien ein paar Bemerkungen zu den Einschränkungen an den jeweiligen kleinsten Rang der Lie-Algebren der Serien  $A, B, C, D$  gemacht. Diese Einschränkungen vermeiden das Auftreten gleicher Graphen in verschiedenen Serien.

Für  $n = 1$  finden wir  $B_1 = C_1 = A_1$ , was den Isomorphismen  $\mathfrak{so}_3\mathbb{C} \cong \mathfrak{sp}_2\mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$  entspricht, alle diese Dynkin-Diagramme bestehen aus genau einem Punkt. Der Fall  $D_1 = \mathfrak{so}_2\mathbb{C}$  muß ausgeschlossen werden, weil diese Lie-Algebra nicht halbeinfach ist.

Für  $n = 2$  finden wir  $D_2 = A_1 \times A_1$  entsprechend der Isomorphie  $\mathfrak{so}_4\mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ . Die Dynkin-Diagramme bestehen aus zwei nicht miteinander verbundenen Punkten. Weiter finden wir  $C_2 = B_2$  entsprechend der Isomorphie  $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C} \cong \mathfrak{so}_5\mathbb{C}$ . Die zugehörigen Dynkin-Diagramme sind gleich, da bei genau zwei Punkten die Richtung des Pfeiles der zwei Verbindungslinien irrelevant ist.

Für  $n = 3$  schließlich finden wir  $D_3 = A_3$  entsprechend der Isomorphie  $\mathfrak{so}_6\mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}_4\mathbb{C}$ .

Wenn man will, kann man übrigens durch sukzessives Entfernen von Punkten (von rechts nach links) formal  $E_5 = D_5, E_4 = A_4, E_3 = A_2 \times A_1, E_2 = A_1 \times A_1$  und  $E_1 = A_1$  setzen.

Die Wurzelsysteme für die exceptionellen Lie-Algebren sind übrigens

$$R_p^+ = \begin{cases} \{L_1, -\frac{3}{2}L_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2\} & \text{für } G_2, \\ \{L_2 - L_3, L_3 - L_4, L_4, \frac{1}{2}(L_1 - L_2 - L_3 - L_4)\} & \text{für } F_4, \\ \{\frac{1}{2}(L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 + \sqrt{3}L_6), L_1 + L_2, \} \cup \{L_{i+1} - L_i : i = 1, \dots, 4\} & \text{für } E_6, \\ \{\frac{1}{2}(L_1 - L_2 - \dots - L_6 + \sqrt{2}L_7), L_1 + L_2\} \cup \{L_{i+1} - L_i : i = 1, \dots, 5\} & \text{für } E_7, \\ \{\frac{1}{2}(L_1 - L_2 - \dots - L_7 + L_8), L_1 + L_2\} \cup \{L_{i+1} - L_i : i = 1, \dots, 6\} & \text{für } E_8. \end{cases}$$