

NOETHER THEOREM

Wiederholen Sie das Noether Theorem. Es besagt, dass zu jeder *differenzierbaren* Familie von Symmetrie-Transformationen ein Erhaltungssatz und eine erhaltene Größe Q gehören. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

Lagrange-Formalismus. Es sei eine Lagrange-Funktion L gegeben als Funktion der generalisierten Koordinaten q_i und deren Geschwindigkeiten \dot{q}_i . Natürlich genügt es meist, sich den einfachsten Fall anzusehen, wo wir nur eine Koordinate q und eine Geschwindigkeit \dot{q} haben. Wiederholen Sie, dass aus der Extremalbedingung an die Wirkung $S = \int dt L(q(t), \dot{q}(t))$ die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

als Bewegungsgleichungen folgen.

Lokale ein-parameterige Symmetrie. Nehmen Sie nun an, dass es für einen reellen Parameter s in einer kleinen Umgebung $(-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Abbildung

$$h_s : q \mapsto h_s(q)$$

gibt, zusammen mit einer davon induzierten Abbildung

$$\hat{h}_s : \dot{q} \mapsto \hat{h}_s(\dot{q}) = \frac{\partial h_s(q)}{\partial q} \dot{q}.$$

Wir sagen, die Lagrange-Funktion ist *invariant* unter dieser Symmetrie h_s , wenn es für jede Wahl des Parameters s eine Funktion $F_s(q, \dot{q}, t)$ gibt, so dass

$$L(h_s(q), \hat{h}_s(\dot{q})) = L(q, \dot{q}) + \frac{d}{dt} F_s(q, \dot{q}, t) \tag{1}$$

ist. Überlegen Sie, warum wir nicht verlangen müssen, dass $F_s \equiv 0$ ist.

Erhaltungssätze. Jede Invarianz solcher Art bringt eine Erhaltungsgröße mit sich. Sei $\phi : t \mapsto q = \phi(t)$ ein Pfad, also eine Parametrisierung des Weges mit der Zeit t . Mit Hilfe der Symmetrie h_s können wir jeden solchen Pfad auf einen neuen abbilden,

$$\phi_s = h_s \circ \phi : t \mapsto q = h_s(\phi(t)).$$

Offensichtlich ist nach Konstruktion der Wert der Wirkung des Pfades unabhängig von s . Ist also ϕ eine Lösung der Bewegungsgleichungen, so ist es auch ϕ_s für alle s . Es ist praktisch, die Parameter s und t ähnlich zu behandeln. Daher schreiben wir $\Phi(s, t) := h_s \circ \phi(t)$. Leiten Sie (1) nach s ab und verwenden Sie anschließend die Bewegungsgleichungen um auf die Gleichung

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial F_s}{\partial s} \right)$$

zu kommen. Wie ist also die erhaltene Größe Q , die *Noether-Ladung*, gegeben?

Beispiel 1. Sei $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$ mit einem Potential $V(\vec{x})$, das für alle s invariant unter Verschiebungen $\vec{x} \mapsto \vec{x} + s \vec{a}$ ist. Zeigen Sie, dass dieser Lagrangian die Noether-Ladung $Q_{\vec{a}} = m \dot{\vec{x}} \cdot \vec{a}$ besitzt.

Beispiel 2. Verwenden Sie das Noether-Theorem, um die Erhaltungsgröße für Invarianz unter Drehungen um eine Achse \vec{a} zu finden. Überlegen Sie dazu als Zwischenschritt, dass in diesem Fall $\frac{d h_s}{d s}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$ ist.

Der Begriff der Gruppen-Mannigfaltigkeit wird eine große Rolle spielen. Wir wollen uns diese Objekt an einem einfachen Beispiel verdeutlichen. Betrachten Sie dazu die sogenannte Matrix-Lie-Gruppe $SU(2)$, also die Gruppe aller 2×2 Matrizen M definiert als

$$SU(2) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : M^{-1} = M^\dagger \text{ und } \det M = +1 \text{ und } a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

Gruppe. Zeigen Sie, dass die so definierte Menge $SU(2)$ eine Gruppe unter Matrixmultiplikation formt.

Mannigfaltigkeit. Ein beliebiges Element M der Gruppe $SU(2)$ wird offensichtlich durch vier komplexe Zahlen a, b, c, d parametrisiert. Allerdings sind ganz offensichtlich nicht beliebige Quadrupel von komplexen Zahlen erlaubt. Finden Sie die Einschränkungen an die Parameter (a, b, c, d) , so dass $M = M(a, b, c, d) \in SU(2)$ ist. Fassen Sie die zunächst vier komplexen Parameter als acht reelle auf. Wieviele reelle Parameter braucht man in Wirklichkeit aber nur? Welche einschränkende Gleichung müssen diese zudem erfüllen? Welche Mannigfaltigkeit wird demnach durch die Menge der möglichen Parameter aufgespannt?

Noch ein Beispiel. Betrachten Sie nun die Matrix-Lie-Gruppe der Drehungen im \mathbb{R}^3 . Diese ist definiert als

$$SO(3) := \{ M = 3 \times 3 \text{ Matrix} : M^{-1} = M^t \text{ und } \det M = +1 \text{ und } M_{ij} \in \mathbb{R} \}.$$

Wir haben also zunächst neun reelle Parameter. Wir wissen aber (oder machen es uns in der Übung klar), dass dreidimensionale Drehungen durch nur drei Parameter, die *Euler-Winkel*, charakterisiert sind. Welche Mannigfaltigkeit wird durch die Eulerwinkel aufgespannt (beachten Sie die Definitionsbereiche)? Was fällt Ihnen auf, wenn Sie Ihr Ergebnis für $SO(3)$ mit dem für $SU(2)$ vergleichen?

Algebra (Vorbereitung). Es ist nicht ganz einfach, die wirklich nötige Zahl der Parameter für solche Matrix-Lie-Gruppen zu bestimmen. Leichter geht es, wenn man infinitesimal kleine Gruppenelemente betrachtet, $M = \mathbb{1} + \delta M$. Es gilt dann nämlich, dass $M^{-1} = \mathbb{1} - \delta M$ ist, was wesentlich einfacher zu handhaben ist. Verwenden Sie nun noch

$$\det M = 1 + \text{tr } \delta M,$$

was wir in der Vorlesung zeigen werden. Wie lauten damit die definierenden Einschränkungen für die infinitesimalen Elemente δM für $SU(2)$ bzw. $SO(3)$, die jeweils aus denen für die Gruppenelemente M folgen? Bestimmen Sie damit nochmals rasch die *Dimensionen* der Gruppen $SU(2)$ bzw. $SO(3)$.