Übung X zur Vorlesung GRUPPENTHEORIE IN DER PHYSIK

Mic$\hbar$ael Flohr
Nils Carqueville

Dynkin-Diagramme

17. Jamuar 2006

KLASSIFIKATION DER COXETER-GRAPHEN

In der Vorlesung wurde das Klassifikationstheorem der zulässigen Coxeter-Graphen bewiesen. Dies sind genau die Graphen, aus denen sich in eindeutiger Weise Wurzelsysteme konstruieren lassen, die zu Lie-Algebren gehören. Ein Wurzelsystem zu einem Graphen mit r Knoten ist im wesentlichen eine Menge von r linear unabhängigen Vektoren, die bestimmte, in der Vorlesung erklärte Eigenschaften besitzen, so dass sie die r einfachen Wurzeln einer Lie-Algebra vom Range r darstellen können. Der Beweis argumentiert in netter Weise mit Eigenschaften von Graphen und den dazu korrespondierenden Eigenschaften von Systemen von Einheitsvektoren. Einige Schritte dieses Beweises sollen in dieser Übung noch einmal durchgeführt werden, in der Hoffnung, dass dies das Gefühl für die Schönheit und Eleganz dieses mathematischen Gebietes mehren möge.

Es sei R_p^+ die Menge der einfachen Wurzeln einer Lie-ALgebra. Wir wissen, dass die Elemente dieser Menge die folgenden Eigenschaften haben:

[A] Die $\alpha \in R_p^+$ sind linear unabhängige Vektoren.

[B] Wenn $\alpha, \beta \in R_p^+$ mit $\alpha \neq \beta$, dann ist $2g(\alpha,\beta)/g(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}_-$ eine nicht-positive ganze Zahl.

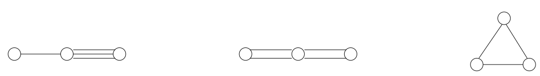
[C] Das Wurzelsystem R_p^+ ist unzerlegbar.

Π-Systeme. Eine Menge von Vektoren, die **[A]**, **[B]** und **[C]** erfüllt, heißt Π-System.

Die letzte Bedingung **[C]** ist nötig, damit ein Wurzelsystem, das die Eigenschaften **[A]** und **[B]** erfüllt, zu einer einfachen Lie-Algebra gehört. Ein Wurzelsystem R_p^+ heißt zerlegbar, wenn es in zwei zueinander orthogonale Teilsysteme aufgespalten werden kann, ansonsten ist es unzerlegbar. Zerlegbare Wurzelsysteme gehören zu Lie-Algebren, die direkte Summen einfacher Lie-Algebren sind, die also halb-einfach sind. Die Klassifikation der einfachen (und damit der halb-einachen) Lie-Algebren ist also gelungen, wenn man alle Π-Systeme klassifiziert hat. Einem Π-System ist ein Coxeter-Graph eindeutig zugeordnet. Bedinung **[C]** besagt, dass der Coxeter-Graph nicht auseinandergenommen werden kann, ohne (mindestens) eine Linie zu zerschneiden.

Lemma 1. Zeigen Sie, dass nur die folgenden zwei Systeme mit drei Knoten Π-Systeme sind:

Zeigen Sie weiter, dass die folgenden drei System mit drei Knoten Bedinung **[A]** verletzten, da die drei Vektoren in einer Ebene liegen:



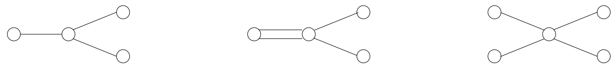
Teilgraphen. Überlegen Sie, dass jeder zusammenhängende Teilgraph eines Coxter-Graphen wieder ein Coxeter-Graph ist. Damit ist jedes unzerlegbare Teilsystem eines Π-Systems auch ein Π-System. Je drei zusammenhängende Vektoren eines beliebigen Π-Systems müssen in eine der beiden erlaubten Formen aus Lemma 1 vorliegen. Geben Sie damit das einzige Π-System an, das eine Dreifachlinie enthält.

Lemma 2. Zeien Sie: Wenn ein Π-System zwei Vektoren enthält, die durch eine einfache Linie verbunden sind, so erhält man ein neues zulässiges Π-System, wenn man diese Linie mit ihren beiden Endpunkten durch nur einen Punkt ersetzt, das Diagramm also um einen Knoten und eine Linie reduziert.

Korollare. Lemma 2 hat zwei wichtige Korollater. Machen Sie sich klar, dass die in Lemma 2 beschriebene Schrumpfmethode die folgenden Fälle ausschließt: Kein Π-System hat mehr als eine Doppellinie, und kein Π-System enthält eine geschlossene Schleife.

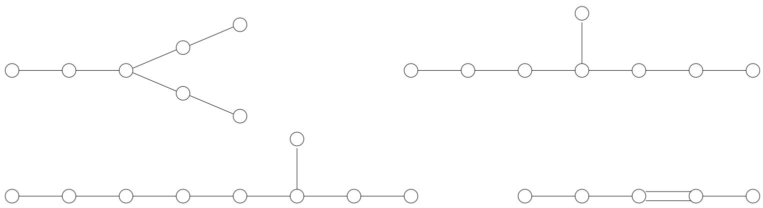
Lemma 3. Es bezeichne A einen zulässigen Teilgraphen. Zeigen Sie, dass, wenn der erste der folgenden Graphen ein Π-System ist, dass es dann auch der zweite ist:

Weitere Korollare. Überlegen Sie unter Verwendung von Lemma 3 und Lemma 1, welche der folgenden (Teil)Graphen erlaubte Verzweigungen eines zulässigen Coxeter-Graphen darstellen.



Machen Sie sich weiter klar, dass kein Π-System zwei oder mehr Verzweigungen besitzen kann.

Sonderfälle. Soweit haben wir allgemein Eigenschaften von Π-Systemen, betrachtet als Graphen, analysiert. Um die Klassifikation abzuschließen, muss man nun noch ein paar Sonderfälle betrachten, die nicht direkt ausgeschlossen werden können. Dies sind die folgenden:



Jeder Knoten j steht für einen Vektor α_j. Nehmen Sie an, dass alle Vektoren α_j die gleiche Länge besitzen (außer im letzten Graphen, dort haben die Vektoren rechts von der Doppellinie eine um$\sqrt{2}$ größere oder kleinere Länge). Finden Sie nun positive ganze Zahlen $\mu_j \in \mathbb{Z}_+$, so dass

$$\left(\sum_j \mu_j \alpha_j \right)^2 = 0$$

ist. Hinweis: Es ist hilfreich, die Knoten durchzunummerieren. Im letzten Fall gibt es zwei Lösungen, je nach dem, ob die Vektoren rechts der Doppellinie die längeren oder kürzeren sind.

Die Klassifikation. Mit unseren Resultaten kann man nun leicht eine Liste der noch erlaubten Graphen aufstellen. Man überzeuge sich, dass die unten stehende Liste vollständig ist, und dass in der Tat jeder dieser Graphen ein Π-System ist. Um die Information, dass Vektoren unterschiedliche Länge haben können, ebenfalls im Graphen sichtbar zu machen, geht man wie folgt vor: Aus unseren Vorüberlegungen folgt bereits, dass die Längen von Vektoren nur dann ungleich sind, wenn diese über eine Mehrfachlinie miteinander verbunden sind. Diese erhält nun einen Pfeil, der von den längeren zu den kürzeren Vektoren zeigt (Eselsbrücke: Der Pfeil ist dann das Symbol für “größer” bzw. “kleiner” in der resultierenden Ungleichung).