Übung XII zur Vorlesung GRUPPENTHEORIE IN DER PHYSIK

Mic$\hbar$ael Flohr
Nils Carqueville

Zentrale Erweiterungen

31. Jamuar 2006

ZENTRALE ERWEITERUNGEN VON LIE-ALGEBREN

In der Quantentheorie werden physikalische Zustände durch Strahlen in Hilbert-Räumen abgebildet, d. h. der Raum der Zustände ist ein *projektiver* Raum. Symmetrien werden in diesem Zusammenhang durch projektive Darstellungen modelliert. Man kann jedoch die projektiven Darstellungen umgehen, indem man *zentrale Erweiternugen* der relevanten Lie-Gruppe oder Lie-Algebra betrachtet und diese dann *linear* auf einem linearen Vektorraum darstellt. In dieser Übung wird der Begriff einer zentral erweiterten Lie-Algebra (mit mäßigem Grad an Allgemeinheit) besprochen und anhand eines wichtigen Beispiels erläutert.

Definition. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Klammer $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ ist die ihre zentrale Erweiterung $\mathfrak{g}'$ als Vektorraum gegeben durch $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K$. Die Klammer von $\mathfrak{g}'$ ist definiert durch

$$[X, Y]' = [X, Y] + K\theta(X, Y) \quad \text{und} \quad [X, K]' = 0 \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{g} \ ,$$

wobei $\theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ bilinear ist. Überprüfen Sie, dass θ die Eigenschaften

$$\theta(X, Y) = -\theta(Y, X) \quad \text{und} \quad (\mathrm{d}\theta)(X, Y, Z) \equiv \theta\,(X, [Y, Z]) + \theta\,(Y, [Z, X]) + \theta\,(Z, [X, Y]) = 0 \qquad (1)$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ erfüllen muss, damit $\mathfrak{g}'$ mit der Klammer $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]'$ auch eine Lie-Algebra ist.

Koränder und Kozykel. Manche Arten von zentralen Erweiterungen lassen sich sehr leicht angeben. Für jede lineare Abbildung $\xi : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ lassen sich die Generatoren der Lie-Algebra umdefinieren, $\widetilde{X} = X + K\xi(X)$, so dass die neuen Klammerausdrücke lauten:

$$\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = [X, Y] = \widetilde{[X, Y]} - K\xi([X, Y]) \ .$$

Überprüfen Sie, dass die so gegebene Struktur tatsächlich eine zentrale Erweiterung ist, d. h. die Beziehungen in (1) sind erfüllt. Die eigentlich interessanten zentralen Erweiterungen sind also gegeben durch solche *2-Kozykeln θ*, die sich *nicht* mit Hilfe von *Korändern ξ* als $\theta(X, Y) = (\mathrm{d}\xi)(X, Y) \equiv \xi([X, Y])$ schreiben lassen. Das bedeutet, dass zentrale Erweiterungen durch die zweite Kohomologie der Lie-Algebra charakterisiert sind.

WITT- UND VIRASORO-ALGEBRA

Als Beispiel soll nun die zentrale Erweiterung der *Witt-Algebra* mit den Klammerbeziehungen

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{Z}$$

untersucht werden. Dies ist die klassische konforme Symmetrie-Algebra in zwei Dimensionen. Ihre zentrale Erweiterung spielt zum Beispiel in der Stringtheorie und in vielen Anwendungen der Statistischen Physik eine große Rolle.

Ansatz. Um eine zentrale Erweiterung zu finden, machen wir den Ansatz $[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + c_{m,n}$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, wobei die neue Klammer weiterhin mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ bezeichnet wird. Welche Eigenschaften muss die Abbildung $c_{\cdot\,,\,\cdot} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ haben, um ein 2-Kozykel zu sein?

Lösung. Die Idee zur Auffindung eines konkreten Kozykels ist es, für möglichst viele $m, n \in \mathbb{Z}$ die Zahlen $c_{m,n}$ gleich Null zu setzen. Dazu wählen wir zunächst eine neue Basis durch $\widetilde{L}_m = L_m + c_{m,0}/m$ für $m \neq 0$ und $\widetilde{L}_0 = L_0 + c_{1,-1}/2$. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\widetilde{L}_m, \widetilde{L}_0]$ und $[\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_{-1}]$ und folgern Sie daraus $\widetilde{c}_{m,0} = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}^\times$ sowie $\widetilde{c}_{1,-1} = 0$. Nutzen Sie dann die von der Jacobi-Identität stammende Eigenschaft der Kozykeln (also ihre Geschlossenheit), um die Rekursionsformel

$$\widetilde{c}_{m+1,-m-1} = \frac{m+2}{m-1}\,\widetilde{c}_{m,-m}$$

zu finden. Diese hat eine eindeutige Lösung der Form $\widetilde{c}_{m,n} = \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$ für beliebige *zentrale Ladung* $c \in \mathbb{C}$, so dass die zentrale Erweiterung der Witt-Algebra bis auf einen Vorfaktor eindeutig festgelegt ist. Das Ergebnis ist die *Virasoro-Algebra* mit den Klammerbeziehungen

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{Z} \ .$$

Zusatz. Drückt man die Killing-Form durch die Strukturkonstanten aus und nutzt dann deren Antisymmetrie, so kann man zeigen, dass für endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebren jeder Kozykel das Differential eines Korandes ist. In diesem Sinne haben solche Lie-Algebren nur triviale zentrale Erweiterungen, und derartige „Quanteneffekte“ treten erst bei unendlichen Symmetrien auf.