Übung IV zur Vorlesung GRUPPENTHEORIE IN DER PHYSIK

Mic$\hbar$ael Flohr
Nils Carqueville

Rechnen mit Exponentialen

22. November 2005

EXPONENTIALE VON GENERATOREN

In der Vorlesung verwenden wir die Physiker-Notation, in der die Generatoren hermitesch gewählt werden. Sei X ein solcher Generator. Dann definiert $U_X(\lambda) = \exp(\mathrm{i}\lambda X)$ eine sogenannte Ein-Parameter Untergruppe der Lie-Gruppe. In der Vorlesung wurde motiviert, dass man jedes Gruppenelement $g \in G$, das in der Zusammenhangskomponente der Eins liegt, so als Exponential eines Generators schreiben kann. Bei den folgenden Aufgaben gehen wir wieder davon aus, dass wir sowohl für die Gruppe G, als auch für ihre Algebra $\mathfrak{g}$, eine Darstellung ρ gewählt haben. Die Dimension der Darstellung sei d. Dann ist $\rho(G) \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ und $\mathrm{d}\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^d)$. Diese Annahme ist nützlich, weil dann $u^a X_a \in \mathrm{d}\rho(\mathfrak{g})$ eine Matrix ist. Damit ist dann

$$\exp(\mathrm{i}u^a X_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}u^a X_a)^n}{n!}$$

definiert. Wir wollen ein paar nützliche Identitäten ausrechnen, insbesondere zu Ableitungen von Exponentialen.

Vorbereitung. Wir wollen berechnen, was $\frac{\partial}{\partial u^b}\exp(\mathrm{i}u^a X_a)$ ist. Betrachten Sie dazu zunächst die Familie $U(\lambda) = \exp(\mathrm{i}\lambda u^a X_a)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} U(\lambda) = \mathrm{i}(u^b X_b)U(\lambda) = \mathrm{i}U(\lambda)(u^b X_b)$$

ist.

Wieder Generatoren. Zeigen Sie nun durch Taylorentwicklung, dass

$$\frac{\partial}{\partial u^b}\exp(\mathrm{i}u^a X_a)\bigg|_{u=0} = \mathrm{i}X_b$$

ist.

Es wird ernst. Berechnen Sie mit der Leibnitz-Regel und unter Beachten der Tatsache, dass im allgemeinen der Kommutator $[u^a X_a, X_b] \neq 0$ ist, die Taylorentwicklung von $\frac{\partial}{\partial u^b}\exp(\mathrm{i}u^a X_a)$.

Nebenrechnung. Zeigen Sie die Identität

$$\int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \lambda^k (1-\lambda)^m = \frac{k!m!}{(k+m+1)!}\,.$$

Hinweis: Das geht am einfachsten durch Induktion über m, beginnend mit $m = 0$.

Es wird sehr ernst. Berechnen Sie nun den Ausdruck

$$\int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \exp(\mathrm{i}\lambda u^a X_a)(\mathrm{i}X_b)\exp(\mathrm{i}(1-\lambda)u^c X_c)\,.$$

Entwickeln Sie dazu die Exponentiale in Taylorreihen und verwenden Sie das Resultat aus der Nebenrechnung.

Endlich. Vergleichen Sie die Koeffizienten aus der letzten Rechnung mit denen aus "es wird ernst", um die folgende hübsche Identität zu beweisen:

$$\frac{\partial}{\partial u^b}\exp(\mathrm{i}u^a X_a) = \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \exp(\mathrm{i}\lambda u^a X_a)(\mathrm{i}X_b)\exp(\mathrm{i}(1-\lambda)u^c X_c)\,.$$

Kürzer kann das mit den obigen Notationen auch als $\frac{\partial}{\partial u^b}U(1) = \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, U(\lambda)\mathrm{i}X_b U(1-\lambda)$ geschrieben werden.

Zur adjungierten Darstellung. Nehmen Sie an, dass $[A, B] = B$ ist. Zeigen Sie damit

$$\exp(\mathrm{i}\alpha A)B\exp(-\mathrm{i}\alpha A) = \exp(\mathrm{i}\alpha)B\,.$$

Hinter dieser Formel steckt folgendes: Wir haben $\mathrm{ad}(A)(B) = B$. Machen Sie sich klar, dass dies nichts anderes heißt als dass B ein Eigenvektor von $\mathrm{ad}(A)$ mit Eigenwert 1 ist. Damit folgt dann aber auch ohne lange Rechnung, dass $\mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{i}\alpha A))(B) = \exp(\mathrm{i}\alpha A)B\exp(-\mathrm{i}\alpha A)$ ebenfalls B als Eigenvektor hat, und zwar mit Eigenwert $\exp(\mathrm{i}\alpha)$. Denken Sie gegebenenfalls über die Identität

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X))$$

nach. Mathematisch wird die Exponentialfunktion Exp, die den Zusammenhang zwischen Lie-Algebra und Lie-Gruppe vermittelt, genau als das Funktional definiert, für das eben dieser Zusammenhang besteht, für das also das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{ad} & & \\ & X \in \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{ad}(X) & \\ \mathrm{Exp} & \downarrow & & \downarrow & \exp \\ & g \in G & \longrightarrow & \mathrm{Ad}(g) & \\ & & \mathrm{Ad} & & \end{array}$$

kommutiert. Man beachte, dass Exp mit Hilfe der adjungierten Darstellung auf der rechten Seite durch die gewöhnliche Exponentialfuntkion, verstanden als ihre Taylorreihe, von Matrizen definiert wird.