Übung VI zur Vorlesung GRUPPENTHEORIE IN DER PHYSIK

Mic$\hbar$ael Flohr
Nils Carqueville

Wurzeln und Gewichte

6. Dezember 2005

WURZELN

Die Gewichte der adjungierten Darstellung einer Lie algebra $\mathfrak{g}$ heißen Wurzeln. Aus ihnen läßt sich die gesamte Lie-Algebra rekonstruieren.

Vielfache. In der Vorlesung wurde behauptet, dass die einzigen Vielfachen einer Wurzel α, die ebenfalls Wurzeln sind, α und $-\alpha$ sind. Beweisen Sie dies.

Weitere Eigenschaften. Wurzeln (wie auch Gewichte) sind zunächst die multiplen Eigenwerte von simultanen Eigenvektoren der Cartan-Unteralgebra. Man kann sie aber ebensogut als lineare Funktionale auffassen, via $\mathrm{ad}(H)(X) = \alpha(H)\, X$, wenn X im Eigenraum $\mathfrak{g}_\alpha$ zu α liegt. Wenn α und β Wurzeln sind, dann können wir die Größe $\eta_{\beta\alpha} = \beta(H_\alpha)$ bilden. Diese läßt sich durch die Killing-Form ausdrücken, $\eta_{\beta\alpha} = 2g(\beta,\alpha)/g(\alpha,\alpha)$. Beachten Sie, dass $\eta_{\beta\alpha}$ nicht symmetrisch ist! Überlegen Sie zunächst, wieso die Killing-Form $g(X,Y) \equiv \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y))$ offensichtlich auch für Wurzeln definiert ist. Es gilt nun, dass für α, β Wurzeln die Größe $\eta_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$ ist. (Wenn Zeit: Wiederholen Sie aus der Vorlesung, wieso das so ist.)

Winkel. Überlegen Sie, wie Sie den Kosinus des Winkels zwischen zwei Wurzeln durch die Killing-Form ausdrücken können. Verwenden Sie dies, um $\eta_{\beta\alpha}$ allein durch Normen $g(X,X)$ und diesen Winkel auszudrücken. Was ergibt sich für $\eta_{\beta\alpha}\eta_{\alpha\beta}$ demnach? Dies muss ebenfalls eine ganze Zahl sein! Welche Möglichkeiten läßt dies für die Winkel zwischen zwei Wurzeln? Stellen Sie eine Tabelle mit allen Möglichkeiten für den Kosinus des Winkels zwischen zwei Wurzeln α, β, den Winkel selbst, sowie den Werten von $\eta_{\alpha\beta}$ und $\eta_{\beta\alpha}$ auf. Aufgrund der mögliche Asymmetrie nehmen Sie hierzu der Bequemlichkeit halber $g(\beta,\beta) \geq g(\alpha,\alpha)$ an.

Lange und kurze Wurzeln. Überlegen Sie, welche Längenverhältnisse von Wurzeln nach den obigen Ergebnissen nur möglich sind.

Beispiele. Konstruieren Sie alle Wurzelsysteme der Dimension eins und zwei. Dazu ist es nützlich, noch folgende Eigenschaft zu beherzigen: Ein Wurzelsystem muss für alle Wurzeln α symmetrisch bezüglich Spiegelungen in den Ebenen $\alpha^\perp$ sein.

GEWICHTE

Die Gewichte charakterisieren eine irrep V eindeutig. Wir wollen auch hier ein paar grundsätzliche Eigenschaften überlegen. Dazu bezeichne $W(V)$ die Menge aller Gewichte von V.

Darstellung aus den Gewichten. Überlegen Sie, dass offensichtlich $V = \bigoplus_{\alpha\in W(V)} V_\alpha$ mit V_α den Gewichtsräumen, also den Eigenräumen zum Gewicht α, so dass für alle $v \in V_\alpha$ und für alle H aus der Cartan-Unteralgebra $H(v) = \alpha(H)\, v$ ist.

Aktion der Wurzeln. Es sei $\mathfrak{g}_\beta$ der Wurzelraum zur Wurzel β. Dieser operiert auf den Gewichtsräumen in offensichtlicher Weise, $\mathfrak{g}_\beta : V_\alpha \to V_{\alpha+\beta}$. Überlegen Sie, dass dies für alle $\alpha, \alpha' \in W(V)$ impliziert, dass $\alpha - \alpha'$ eine ganzzahlige Linearkombination aus Wurzeln sein muss (also eine Element des Wurzel-Gitters ist).