Mic$\hbar$ael Flohr
Nils Carqueville

Höchstgewichtsdarstellungen und Dynkin Labels

20. Dezember 2005

DIE CARTAN-MATRIX

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die einfachen Wurzeln genügen, um eine Lie-Algebra vollständig rekonstruieren zu können. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ habe Rang $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} = r$. Die einfachen Wurzeln seien mit $\alpha^{(i)}$ bezeichnet, $i = 1, \dots, r$. Wir wollen zunächst ein wichtiges Objekt definieren, das alle wesentlichen Informationen der Lie-Algebra enthält, die Cartan-Matrix.

Wurzeln als lineare Funktionale. Die folgende Beobachtung ist sehr nützlich: Es bezeichne $\mathcal{C}$ die Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, aufgespannt durch Generatoren H_i, $i = 1, \dots, r$. In der Eigenbasis zu $\mathcal{C}$ gilt für $E_\alpha \in \mathfrak{g}$, dass $\mathrm{ad}(H_i)(E_\alpha) = \alpha_i E_\alpha$ ist. Es sei nun $H = \sum_i a_i H_i$. Dann ist $\mathrm{ad}(H)(E_\alpha) = \sum_i a_i \alpha_i E_\alpha = \alpha(H)E_\alpha$. Es ist also $\alpha(H)$ ein linear von H abhängender Skalar, und somit $\alpha \in \mathcal{C}^*$ ist. Die einfachen Wurzeln spannen demnach $\mathcal{C}^*$ auf. Zeigen Sie, dass für die Killing-Form $g(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$ gilt: $g(H_i, H_j) = \sum_\alpha \alpha_i \alpha_j$, wobei sich die Summe über alle Wurzeln erstreckt. Tipp: $\mathfrak{g} = \mathcal{C} \oplus \bigoplus_\alpha \mathfrak{e}_\alpha$ mit $\mathfrak{e}_\alpha$ die Eigenräume bezüglich $\mathcal{C}$.

Killing-Form. Überlegen Sie, dass man zu jeder Wurzel $\alpha \in \mathcal{C}^*$ einen Generator $H_\alpha \in \mathcal{C}$ eindeutig finden kann, so dass $g(H_\alpha, H_i) = \alpha_i$ ist. Zeigen Sie dann damit und mit der Linearität der Killing-Form, dass $g(\alpha, \beta) \equiv g(H_\alpha, H_\beta)$ die Killing-Form auf $\mathcal{C}^*$ definiert. Es ist nützlich, diese so definierten Skalarprodukte von einfachen Wurzeln wie folgt abzukürzen: $(i,j) \equiv g(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})$. Bemerkung: Im Gegensatz zur letzten Übung ist dies nun alles unabhängig davon, wie die Killing-Form genau aussieht.

Cartan-Matrix. Man definiert nun die $r \times r$ Matrix A mit Einträgen

$$A_{ij} = 2\frac{(i,j)}{(j,j)}\,.$$

Beachten Sie, dass die Matrix A nicht symmetrisch ist. Überlegen Sie, welche Ihnen bereits bekannte Größe durch $A_{ij}A_{ji}$ gegeben ist. Interpretieren Sie die Einträge der Matrix mit Hilfe der Master-Formel. Zeigen Sie damit, dass für jede Wurzel α gilt:

$$2\frac{g(\alpha, \alpha^{(j)})}{g(\alpha^{(j)}, \alpha^{(j)})} = q - p = \sum_i k_i A_{ij}\,.$$

wobei die $k_i \in \mathbb{Z}$.

Beispiele. Betrachten Sie die folgenden Cartan-Matrizen. Verwenden Sie eine Normierung, in der für α die längste Wurzel $g(\alpha,\alpha) = 2$ gilt. Berechnen Sie für die Beispiele sämtliche Skalarprodukte.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie die zugehörigen Wurzeldiagramme, ähnlich zur Übung von der letzten Woche. Welche Cartan-Matrix gehört zum Beispiel $\mathfrak{so}(5)$ von letzter Woche?

Gewichte. Betrachten Sie nun die allgemeine Master-Formel für ein Gewicht Λ, also

$$q - p = 2\frac{g(\Lambda, \alpha^{(j)})}{g(\alpha^{(j)}, \alpha^{(j)})} \equiv \Lambda_j\,.$$

Was gilt für die Λ_j, wenn Λ ein Höchstgewicht ist? Wie schreibt sich Λ als Linearkombination $\Lambda = \sum_i b_i \alpha^{(i)}$ der einfachen Wurzeln? Lösung: $b_i = \Lambda_j (A^{-1})_{ji}$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis wie folgt: Die Wurzeln bestimmen die kleinsten möglichen Abstände zwischen Gewichten innerhalb einer gegebenen Darstellung. Das Gewichtsdiagramm ist demnach eine Teilmenge eines Gitters, das isomorph zum Wurzelgitter ist. Die Gewichte selbst, für alle Darstellungen zusammen, liegen allerdings auf einem feineren Gitter, dem Gewichtsgitter. Können Sie die Beziehung dieser beiden Gitter zueinander präzisieren?

Die ganzen Zahlen Λ_j charakterisieren ein Gewicht genausogut, wie die Koeffizienten b_i. Diese Zahlen Λ_j enthalten aber auch Informationen darüber, wie oft man in Richtung der einfachen Wurzel $\alpha^{(j)}$ auf- und absteigen darf. Insbesondere für einen Höchstgewicht Λ ist sofort klar, dass Λ_j angibt, wie oft in Richtung $\alpha^{(j)}$ abgestiegen werden kann. Diese Zahlen heißen Dynkin-Label.

Schon wieder unsere Beispiele. Betrachten Sie die Darstellungen aus der Übung von letzter Woche. Welche Dynkinlabel gehören zu diesen Darstellungen? Konstruieren Sie die Darstellungen erneut, verfolgen Sie dabei genau, wie sich für jedes Gewicht in den jeweiligen Darstellungen die Dynkin-Label ergeben. Fällt Ihnen eine einfache Regel auf? Tipp: Schauen Sie sich die Zeilen der Cartan-Marix genau an.

Höchstgewichte und einfache Wurzeln. In den obigen Beispielen gehen wir von Höchstgewichten aus. Man kann von diesen nur absteigen. Überprüfen Sie, dass sich die Dynkin-Label der weiteren Gewichte sukzessive durch Subtrahieren der entsprechenden Zeilen der Cartan-Matrix ergeben. Um jeweils herauszufinden, wie weit man von einem Gewicht in eine Richtung absteigen kann, ist es hilfreich, sich die jeweiligen p-Werte zu merken (also, wie oft man von einem Gewicht aufsteigen darf). Offensichtlich ist für das Höchstgewicht $\Lambda = [\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r]$ natürlich $p = [0, \ldots, 0]$. Steigt man einmal in eine der erlaubten Richtungen ab, sagen wir $\alpha^{(i)}$, dann ist auf dieser nächsten Stufe $p = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$, wobei die 1 an der i-ten Stelle steht. Addiert man diese p-Werte zu den Dynkin-Gewichten hinzu, so kann man ablesen, wie oft man vom Gewicht nun weiter absteigen kann. Überprüfen Sie dies an den obigen Beispielen. Erkennen Sie schließlich eine Symmetrie auf den Dynkin-Labels der jeweiligen vollständigen Gewichtsdiagramme?

Ein neues Beispiel. Betrachten Sie nun $\mathfrak{su}(3)$. Die zugehörige Cartan-Matrix ist die einzige symmetrische der oben angegebenen. Konstruieren Sie die Darstellung zu $\Lambda = [1, 0]$, gegeben durch ihre Dynkin-Label. Wie lautet Λ, ausgedrückt durch die einfachen Wurzeln? Können Sie die Dynkin-Label der adjungierten Darstellung angeben?