Michael Flohr
Nils Carqueville

Die klassischen Lie-Gruppen

10. Jamuar 2006

MATRIX-LIE-GRUPPEN

Die meisten Lie-Gruppen, denen man in der Physik begegnet, sind sogenannte Matrix-Lie-Gruppen und somit Untergruppen von $GL(n,\mathbb{R})$ oder $GL(n,\mathbb{C})$. Diese beiden Gruppen sind einfach die invertierbaren $n\times n$ Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die in der Physik üblicherweise auftretenden Untergruppen sind im allgemeinen durch Erhlatungsgrößen unter den durch diese Untergruppe definierten Symmetrien bestimmt. In dieser Übung werden wir die wichtigsten Typen dieser Untergruppen kennenlernen.

$GL(n,\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass GL_n (sowohl mit reellen als mit komplexen Koeffizienten) tatsächlich eine Lie-Gruppe ist indem Sie begründen, warum die Menge der invertierbaren $n\times n$ Matrizen eine differenzierbare Mannigfaltigkeit formt. Tipp: Warum ist die Menge der invertierbaren Matrizen eine *offene* Teilmenge des Vektorraums aller $n\times n$ Matrizen? Die Differenzierbarkeit zeigen Sie durch Betrachten der Matrix-Multiplikation und des Invertierens mit Hilfe der Cramerschen Regel. Welche Dimension hat die Gruppe GL_n demnach? Wieviele Zusammenhangskomponenten hat $GL(n,\mathbb{R})$ (die Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend)? Wie ist die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n$ definiert?

Die meisten anderen Lie-Gruppen können als Untergruppen von $GL(n,\mathbb{K})$ beschrieben werden, wobei entweder $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ist. Es gibt zwei Wege, solche Untergruppen zu definieren. Zum einen kann man einschränkende Gleichungen an die Koeffizienten der Matrizen stellen, zum anderen können Untergruppen durch die Automorphismen von $V\cong\mathbb{K}^n$ definiert werden, die eine gegebene Struktur auf $\mathbb{K}^n$ erhalten.

$SL(n,\mathbb{K})$. Diese Gruppe kann als die Untergruppe der Matrizen mit Determinante eins beschrieben werden. Welche Struktur lassen die durch solche Matrizen gegebenen Transformationen auf $\mathbb{K}^n$ invariant? Welche Dimension hat SL_n demnach? Welche Matrizen bilden die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ (nutzen Sie $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ aus)?

B_n und N_n. Dies sind die oberen Dreiecksmatrizen und die oberen Dreiecksmatrizen mit Hauptdiagonalelementen eins. Zeigen Sie, dass diese Mengen tatsächlich Untergruppen von $GL(n,\mathbb{K})$ sind. Geben Sie deren Dimensionen an. Die erhaltene Struktur ist in diesem Fall nicht so einfach zu beschreiben. Es handelt sich um die sogenannte Flagge $0=V_0\subset V_1\subset\ldots\subset V_{n-1}\subset V_n=\mathbb{K}^n$, wobei die Teilräume $V_i=\mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_i\}$ wie eine russische Puppe ineinander geschachtelt sind. Können Sie sich das veranschaulichen (betrachten Sie $n=2$ oder $n=3$)? Die Gruppe N_n hat noch die zusätzliche Eigenschaft, dass Sie auf den Quotientenräumen V_{i+1}/V_i als Identität operiert. Natürlich kann man völlig analog entsprechende untere Dreiecksmatrizen betrachten.

Cartan-Weyl-Basis. Erinnern Sie sich, dass wir jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in ihre Cartan-Algebra $\mathfrak{h}$, die in der Eigenbasis ausschließlich aus diagonalen Matrizen besteht, und in Auf- und Absteigeoperatoren E_α und $E_{-\alpha}$ zerlegt haben, wobei die $\alpha>0$ die positiven Wurzeln sind. Der Unterraum $\mathfrak{n}_+\subset\mathfrak{g}$ ist der Span aller E_α, und $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{n}_-$. Nach Konstruktion sind die E_α strikte obere Dreiecksmatrizen mit verschwindenen Diagonalelementen. Zeigen Sie, dass diese eine geschlossene Unteralgebra bilden. Zeigen Sie weiter, dass die zugehörige Gruppe eine Untergruppe von N_n ist, wenn $\dim\mathfrak{g}=n$ ist. Die Cartan-Weyl-Basis impliziert so eine Zerlegung eine Lie-Gruppe in diagonale Matrizen sowie obere und untere Dreiecksmatrizen mit Diagonalelementen eins.

STRUKTUREN DRUCH FORMEN

Die meisten Symmetrien in der Physik können mit Hilfe von bilinearen oder sesquilinearen Formen verstanden werden, die auf einem gegebenen Vektorraum definiert sind und unter den Symmetrie-Operationen invariant gelassen werden. Solche Formen bilden Zahlen aus Paaren von Vektoren und sind daher gute Werkzeuge um observable Größen zu produzieren. Eine bilineare Form ist eine bilineare Abbildung $Q:\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$. Man kann sich nun fragen, welche Matrizen A die Gleichung $Q(Av,Aw)=Q(v,w)$ für alle $v,w\in\mathbb{K}^n$ erfüllen. Im folgenden sollen einige Möglichkeiten für Q diskutiert werden. Ist so eine Form Q gegeben, so können wir diese durch eine Cauchy-matrix C darstellen, deren Einträge die Skalarprodukte $Q(e_i,e_j)$ für eine kanonische Standardbasis sind. Dann ist $Q(v,w)=v^t\,C\,w$, so dass die Menge der Matrizen A, die Q invariant lassen, die Bedingung $A^t\,C\,A=C$ erfüllen muss.

Q symmetrisch, positiv definit. Überlegen Sie, dass so ein Q in die Form eines Euklideschen Standardskalarprodukt gebracht werden kann. Welche Matrizen lassen die Euklidische Länge eines Vektors invariant? Welche Bedingung müssen diese Matrizen erfüllen? Welche Werte kann die Determinante annehmen? Welche Gruppe erhalten Sie, wenn Sie zusätzlich fordern, dass die Matrizen eine Untergruppe von $SL(n, \mathbb{K})$ bilden sollen? Welche Dimensionen haben diese Gruppen? Um diese Fragen explizit beantworten zu können, überlegen Sie zunächst, dass eine symmetrische, positiv definite Form Q in eine Form gebracht werden kann, deren Cauchy-Matrix $C = \mathbb{1}$ ist. Wieviele Zusammenhangskomponenten haben die beiden Gruppen? Welche Eigenschaft müssen die Matrizen erfüllen, die die zugehörigen Lie-Algebren bilden (verwenden Sie die mathematische Konvention für die Generatoren eine Lie-Algebra)?

***Q* symmetrisch, indefinit aber nicht entartet.** In diesem Fall hat die Cauchy-Matrix keine verschwindenden Eigenwerte. Sie wird daher k positive Eigenwerte und l negative Eigenwerte besitzen mit $k+l = n$. Man nennt (k, l) die Signatur der Form Q. Die entsprechenden Lie-Gruppen sind die Gruppen $SO(k, l)$, ein Beispiel ist die Lorentz-Gruppe $SO(1, 3)$. Warum machen diese Gruppen nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Sinn? Offensichtlich gilt $SO(k, l) \cong SO(l, k)$. Nimmt man Spiegelungen hinzu, so erhält man die Gruppen $O(k, l)$. Zeigen Sie, dass $SO(k, l)$ nicht zusammenhängend ist, wenn $(k, l) \neq (n, 0)$ oder $(0, n)$ ist. Wieviele Zusammenhangskomponenten gibt es? Es genügt, sich dies am Beispiel der Lorentzgruppe klarzumachen. Zeigen Sie damit, dass $O(k, l)$ insgesamt vier Komponenten und das diskrete Zentrum $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ besitzt.

***Q* schiefsymmetrisch, nicht entartet.** Dieser Fall ist für das Studium Hamiltonscher Mechanik wichtig, welche auf symplektischen Mannigfaltigkeiten lebt. Die Gruppe, die so eine Form invariant lässt, heißt $Sp(n, \mathbb{R})$, und ist nur für gerade n definiert. Überlegen Sie, dass Q für $n = 2m$ die Standardform von Q durch die Cauchy-Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_m \\ -\mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Begründen Sie, dass die Dimension $\dim Sp(n, \mathbb{R}) = \frac{1}{2} n(n+1)$ ist. Tipp: Sei $A \in Sp(n, \mathbb{R})$. Solch eine Matrix A ist sicherlich auch ein Element von $GL(2m, \mathbb{R})$. Die Bedingung $A^t \, C \, A = C$ für $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in Blockform mit $a, b, c, d \in GL(m, \mathbb{R})$ ergibt die folgenden Einschränkungen an die Teilblöcke: $a^t c$ und $b^t d$ müssen symmetrisch sein, $a^t d - c^t b = \mathbb{1}_m$. Überlegen Sie, dass die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ aus den Matrizen $X \in \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{R})$ besteht, die der Bedingung $X^t \, C + C \, X = 0$ genügen. Man kann ferner zeigen, dass alle Elemente von $Sp(n, \mathbb{R})$ Determinate eins haben, und dass $Sp(n, \mathbb{R})$ zusammenhängend ist. Es gibt eine völlig analoge Definition für symplektische Gruppen über komplexe Vektorräume, $Sp(n, \mathbb{C})$, und deren Algebren.

***Q* Hermitesch, positiv definit.** Für komplexe Vektorräume $V \cong \mathbb{C}^n$ kann man sesquilineare Formen statt bilinearer Formen betrachten. Besonders interessant sind die Hermiteschen Formen, die $Q(\lambda v, \mu w) = \bar{\lambda} Q(v, w) \mu$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ erfüllen. Außerdem gilt $Q(w, v) = \overline{Q(v, w)}$. So eine Form ist positiv definit, wenn $Q(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$. Wie lautet die Bedingung für Matrizen A, die so eine Hermitesche Form, gegeben durch ihre Cauchy-Matrix C, invariant lassen? Was ergibt sich demnach, wenn Q in die Standardform $C = \mathbb{1}$ gebracht werden kann? Welche Werte kann die Determinante von A annehmen? Welche Gruppe ergibt sich, wenn man $\det A = 1$ fordert? Welche Dimensionen (über $\mathbb{R}$) haben diese Gruppen? Man beachte, dass es keinen Sinn macht, die Dimension dieser Gruppen über $\mathbb{C}$ zu definieren. Diese Gruppen sind in der Tat reelle und keine komplexen Lie-Gruppen! Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass diese Gruppen hier kompakt sind (warum?), dass aber jede kompakte komplexe Lie-Gruppe Abelsch sein muss.

***Q* Hermitesch, indefinit, nicht entartet.** Ganz ähnlich wie bei den reellen bilinearen Formen kann man auch indefinite Hermitesche Formen einer Signatur (k, l) betrachten. Die zugehörigen Gruppen werden dann mit $U(k, l)$ sowie $SU(k, l)$ bezeichnet, wobei letztere die Untergruppen von Elementen mit Determinante eins sind.