



Konforme Feldtheorie und Riemannsche Flächen

Michael Flohr

Physikalisches Institut ◇ *Universität Bonn*

Mathematisches Institut ◇ Universität Münster

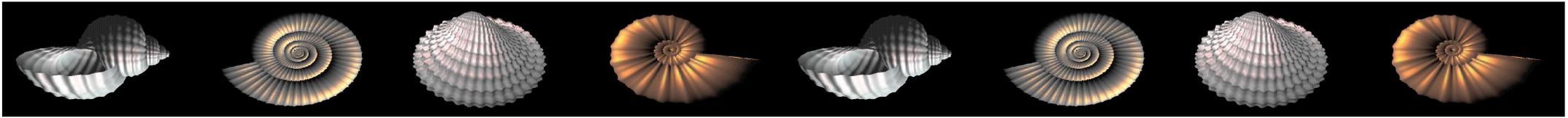
2. Dezember 2004



Teil I Motivation

Teil II Geometrische Definition

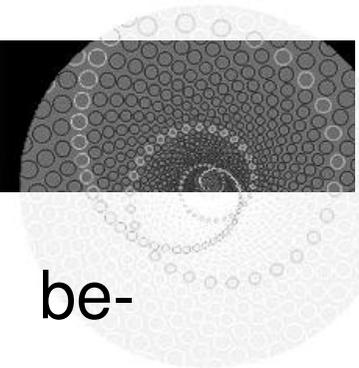
Teil III Logarithmische Konforme Feldtheorie



Teil I

Motivation

Mathematische Physik



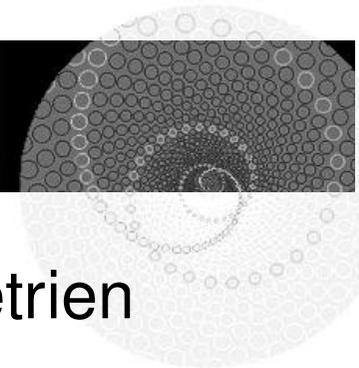
Identifiziert mathematische Strukturen, die Realität beschreiben.

- ⑥ **Newton:** Alles ist *Materie* \implies Analysis.
Für Newton bestand selbst Licht aus Teilchen.
- ⑥ **Einstein:** Alles ist *Energie* \implies Geometrie.
Wir alle kennen die Formel $E = mc^2$.
- ⑥ **Heisenberg:** Alles ist *Symmetrie* \implies Algebra.
Erhaltungssätze, Auswahlregeln, Eichgruppen, ...

Moderne theoretische Physik: Vereint diese drei Aspekte.
Alles ist *Struktur* \implies (Quanten-) Feldtheorien.

- △ Welche Strukturen gibt es?
- △ Was *bedeutet* es, dass Natur mit mathematischen Strukturen beschrieben werden kann? Warum ist Natur so „symmetrisch“, „geometrisch“ oder „analytisch“?

Symmetrien



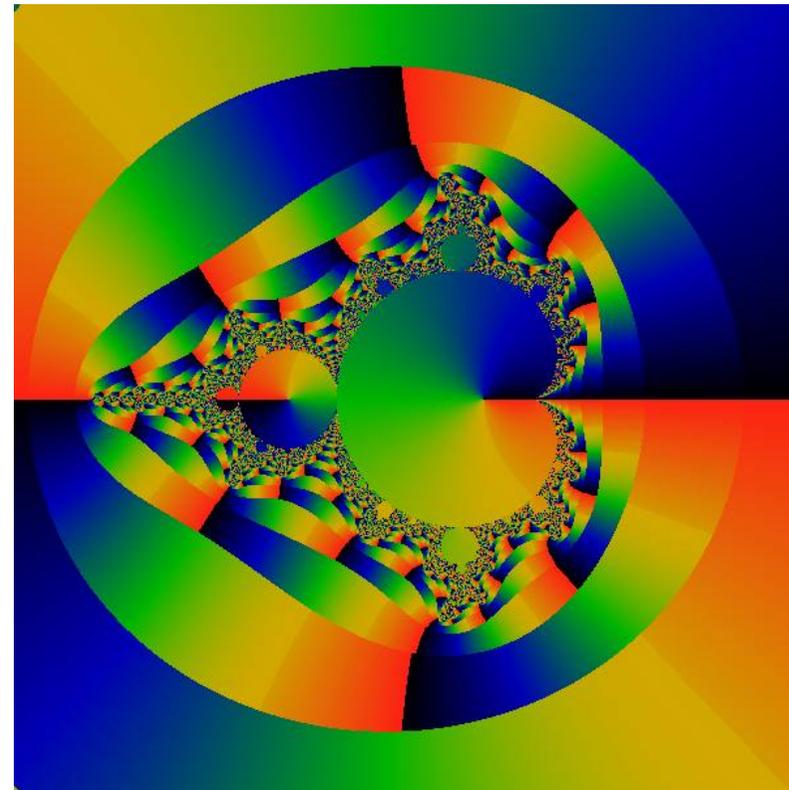
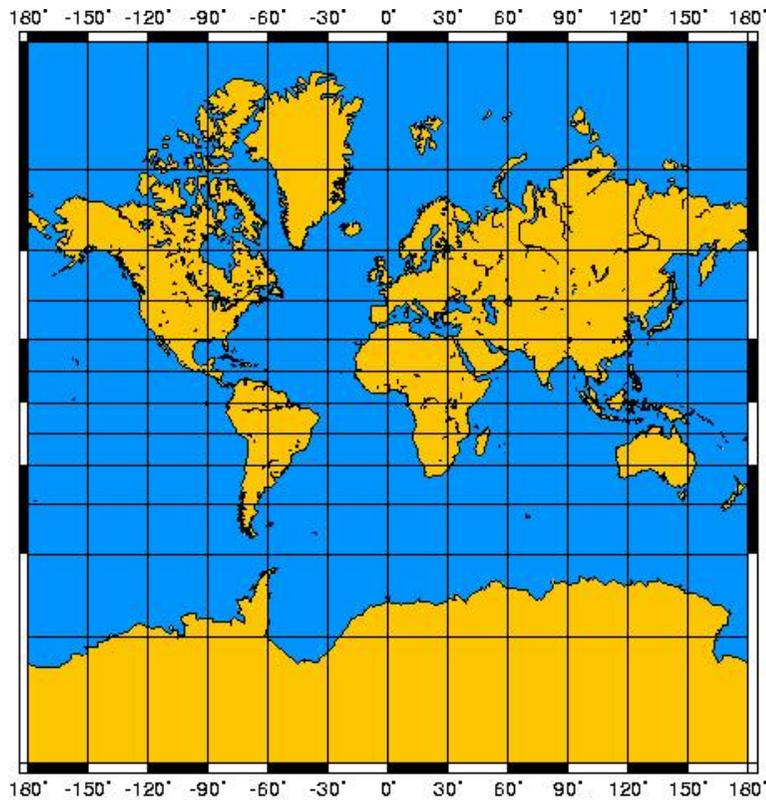
Erfahrung zeigt, dass die Naturgesetze durch Symmetrien in einem erstaunlichen Maße fixiert sind. Beispiele:

- ⑥ **Spektrum von Atomen in Kristallen.** Diskrete endliche Gruppe der rigiden Symmetrien eines Kristalls bestimmt, welche Entartungen aufgehoben werden.
- ⑥ **Fundamentale Kräfte** werden durch Eichfeldtheorien beschrieben. Quantenzahlen sind Gewichte von Darstellungen der Eichgruppen, kompakten Lie-Gruppen wie $U(1)$, $SU(2)$ und $SU(3)$.
- ⑥ Ausgedehnte oder zusammengesetzte Objekte, z.B. **Strings**, besitzen noch größere Symmetrien wie unendlich-dimensionale Lie-Algebren.

Eine Symmetrie ist besonders interessant: Symmetrie unter **Skalierung** (man denke an dimensionale Analyse!).

Konforme Symmetrie

Sei eine Theorie invariant unter **lokalen** Skalentransformationen: $g_{\mu\nu}(x) \mapsto \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \lambda(x)g_{\mu\nu}(x)$. Solche Abbildungen erhalten lokal die Winkel, deshalb heißen sie **konform**.



Konforme Abbildungen in **zwei** Dimensionen sind etwas ganz Besonderes ...

Unendliche Symmetrie

In zwei Dimensionen können wir auf der komplexen Ebene \mathbb{C} leben: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Jede **holomorphe** Abbildung $z \mapsto z' = f(z)$, $\bar{\partial}f(z) = 0$, ist konform. Zwei-dimensionale konform invariante Theorien haben daher eine unendliche Anzahl von *lokalen* Symmetrien.

▲ Mich persönlich interessieren *Quantenfeldtheorien*.

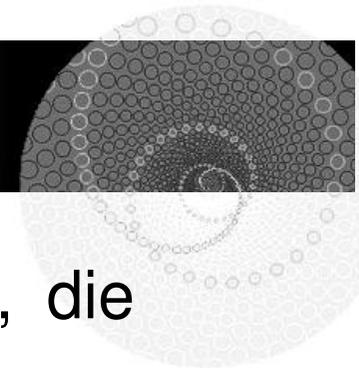
$$f(z) = z + \varepsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n z^n,$$

$$[L_\varepsilon, \Phi(z)] = \Phi(z + \varepsilon(z)), \quad \Longrightarrow$$

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}.$$

Dies ist die **Virasoro-Algebra** der Generatoren lokaler konformer Transformationen, $L_n = \rho(z^{n+1}\partial)$. Sie ist ein Beispiel für eine unendlich-dimensionale Lie-Algebra.

Motivation (Statistische Physik)



Klassifizieren konform invarianter Theorien bedeutet, die **Darstellungstheorie** dieser Algebra zu studieren.

△ Universalitätsklassen zwei-dimensionaler statistischer Systeme am kritischen Punkt klassifiziert durch den Wert der **zentralen Erweiterung** c .

△ Kritische Exponenten gegeben durch Skalendimensionen **primärer Felder**, d.h. durch Höchstgewichte von irreps:

$$\Phi_h(f(z)) = \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^{-h} \Phi_h(z), \quad \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_h(z)|0\rangle \equiv |h, c\rangle.$$

Insbesondere $\Phi_h(\lambda z) = \lambda^{-h} \Phi_h(z)$.

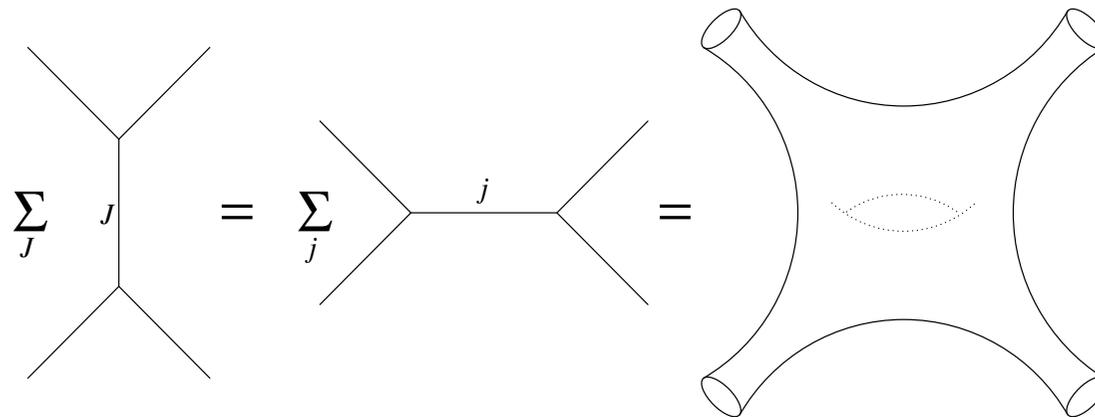
△ **Rationale** konforme Feldtheorien, z.B. minimale Modelle:

$$c_{p,q} = 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq}, \quad \left\{ h_{r,s}(c) = \frac{(pr-qs)^2 - (p-q)^2}{4pq} : 1 \leq r < q, 1 \leq s < p \right\}.$$

Motivation (Stringtheorie)

Klassifizieren konform invarianter Theorien bedeutet, die **geometrische Struktur** von Darstellungen dieser Algebra zu studieren.

△ Die Freiheitsgrade von propagierenden und wechselwirkenden Strings werden durch konforme Feldtheorien auf deren Weltflächen beschrieben.



△ Funktioniert, wenn die Streuamplitude Dualität besitzt. Das resultierende Spektrum ist das einer schwingenden Saite.



Teil II

Geometrische Definition

Beispiel: TFT (Kategorie)

Topologische Feldtheorie: Eine einfache mathematische Struktur für Geometrie, ein Funktor $\Phi : \mathbf{Man}(d) \rightarrow \mathbf{Vect}$.

⑥ **Kategorie:** Objekte x mit Morphismen $f : x \rightarrow y$.
Assoziativ: Mit $g : y \rightarrow z$ ist $g \circ f : x \rightarrow z$ Morphismus und $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Identität: $\forall x : \exists \mathbb{I}_x : x \rightarrow x$ mit $f \circ \mathbb{I}_x = \mathbb{I}_y \circ f$.

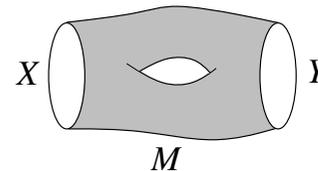
⑥ **Funktor:** Abbildung zwischen Kategorien, die Objekte auf Objekte und Morphismen auf Morphismen abbildet, und alle Relationen respektiert.

⑥ **Tensorategorie:** Objekte und Morphismen können multipliziert werden. \mathbf{Vect} ist abelsche Tensorategorie mit assoziativer und kommutativer Multiplikation \otimes . Inverses von Objekt V ist V^* . Produkt von Morphismen $\Phi_1 : V_1 \rightarrow W_1$ und $\Phi_2 : V_2 \rightarrow W_2$ ist $\Phi_1 \otimes \Phi_2 : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$. Das Eins-Element ist \mathbb{C} .

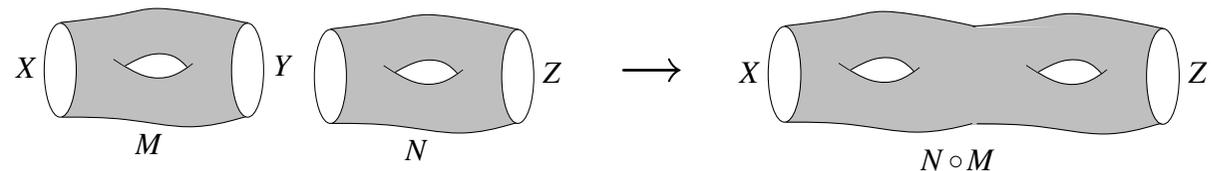
Beispiel: TFT (Bordismus)

$\text{Man}(d)$ ist die Kategorie der d -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Objekte X sind glatt, kompakt, orientiert, ausgestattet mit einer Parametrisierung in lokalen Koordinaten. Morphismen sind Bordismen $M : X \rightarrow Y$.

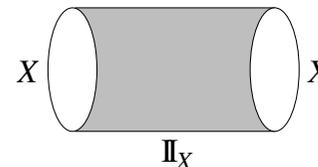
- M ist glatte, orientierte, $(d+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, $\partial M = (-X) \cup Y$.



- Verkettung von Bordismen $M : X \rightarrow Y$ und $N : Y \rightarrow Z$ zu $N \circ M : X \rightarrow Z$ durch Verkleben (identifiziere Y mit $-Y$).



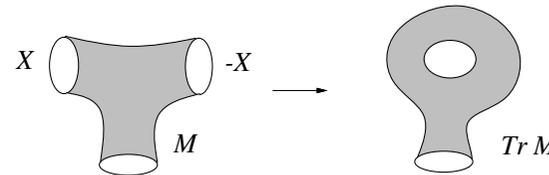
- Der Identitäts-Morphismus für X ist einfach der Zylinder $\mathbb{I}_X = X \times [0, 1]$.



Beispiel: TFT (Definition)

In $\mathbf{Man}(d)$ ist zusätzlich eine Spur definiert, die zwei gleiche Ränder X einer irreduziblen Mannigfaltigkeit M verklebt:

$$\mathrm{Tr}_X : M \rightarrow \mathrm{Tr}_X(M).$$



TFT ist Funktor $\Phi : \mathbf{Man}(d) \rightarrow \mathbf{Vect}$ mit den Eigenschaften

$$\Delta \quad \Phi : \begin{cases} X \rightarrow V_X, \\ (M : X \rightarrow Y) \rightarrow (\Phi_M : V_X \rightarrow V_Y). \end{cases}$$

$$\Delta \quad \Phi_{N \circ M} = \Phi_N \circ \Phi_M \text{ und zusätzlich } \Phi_{\mathrm{Tr}_X M} = \mathrm{Tr}_{V_X}(\Phi_M).$$

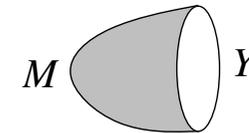
$$\Delta \quad \begin{aligned} V_{X \cup Y} &= V_X \otimes V_Y, & V_{-X} &= V_X^*, & V_\emptyset &= \mathbb{C}, \\ \Phi_{M \cup N} &= \Phi_M \otimes \Phi_N, & \Phi_{-M} &= \Phi_M^*, & \Phi_\emptyset &= \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Δ Für M mit $\partial M = \emptyset$ ist der entsprechende Morphismus $\Phi_M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Multiplikation mit einer Zahl Z_M , die **Zustandssumme**.

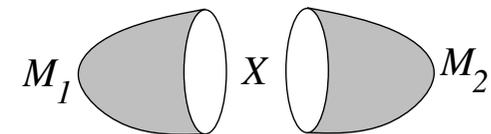
Beispiel: TFT (Amplituden)

Die Morphismen M beschreiben durch den Funktor Φ die **Amplituden** der TFT.

- Ein M mit einem einzelnen ausgehenden Rand Y , also $M : \emptyset \rightarrow Y$, ergibt eine Amplitude $\Phi_M : \mathbb{C} \rightarrow V_Y$, die einen **Zustand** $\Psi_M \in V_Y$ definiert.



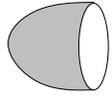
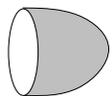
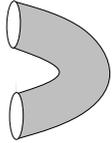
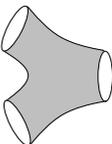
- Zerlegt man M in zwei Teile M_1 und M_2 mit gemeinsamen Rand $\partial M_1 = X = -\partial M_2$, so erhält man die Zustandssumme $Z_M = \langle \Psi_{M_1}, \Psi_{M_2} \rangle$.



- Ein Diffeomorphismus von X , realisiert als Operator γ auf V_X , definiert ein neues M' mit $Z_{M'} = \langle \Psi_{M_1}, \gamma \Psi_{M_2} \rangle$.
- Für $M = [0, 1] \times X$ und $N = S^1 \times X$ ist $Z_N = \text{Tr}(\Phi_M) = \dim V_X$.

Konforme Feldtheorie (Vorbereitung)

Eine TFT in zwei Dimensionen ist besonders einfach. Der einzige zusammenhängende, kompakte Rand ist S^1 , es gibt nur einen Vektorraum $V = V_{S^1}$ und seinen Dualraum.

- △ Die Scheibe mit einem ausgehenden Rand definiert das **Vakuum**, den Zustand $1 \in V$. 
- △ Die Scheibe mit einem eingehenden Rand definiert ein lineares Funktional $\langle \cdot \rangle_0 : V \rightarrow \mathbb{C}$. 
- △ Die Zustandssumme von S^2 ist demnach $Z(S^2) = \langle 1 \rangle_0$.
- △ Der Zylinder mit zwei eingehenden Rändern definiert ein inneres Produkt $\eta : V \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$. 
- △ Eine Kugel mit drei Löchern korrespondiert zu einer Abbildung $C : V \otimes V \rightarrow V$ bzw. einem **Vertexoperator** $C : V \rightarrow \text{End}(V)$. 

Konforme Feldtheorie (Vorbereitung)

Sei eine Basis ϕ_i in V gewählt, $\phi_0 = 1$.

△ $\eta_{ij} = \eta(\phi_i, \phi_j)$, $\eta^{-1}(\phi_i, \phi_j) = \eta^{ij}$ und $\eta \cdot \eta^{-1} = \eta^{-1} \cdot \eta = \mathbb{I}$.

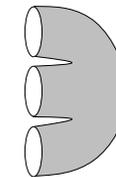
△ Mit $\phi \cdot \psi = C(\phi, \psi)$ wird V eine Algebra, das **Operatorprodukt** der TFT. C vermittelt einen Isomorphismus zwischen Operatoren und Zuständen.

△ Die **Strukturkonstanten** der TFT sind gegeben durch

$$C_i(\phi_j) = \phi_i \cdot \phi_j = \sum_k c_{ij}^k \phi_k.$$

△ Offensichtlich ist mit $c : \text{Sym}^3 V \rightarrow \mathbb{C}$

$$c_{ijk} = c_{ik}^l \eta_{lk} \text{ und } \eta_{ij} = c_{ij0}.$$



△ Mit $H = \sum_{i,j} c_i^{ij} \phi_j$ ist die Zustandssumme

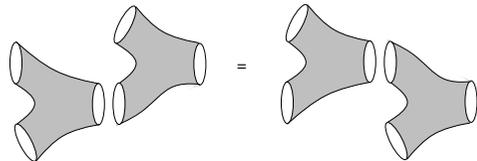


$$Z_g = \left\langle \underbrace{H \cdots H}_g \right\rangle_0 = \text{Tr } H^{g-1}.$$

Konforme Feldtheorie (Relationen)

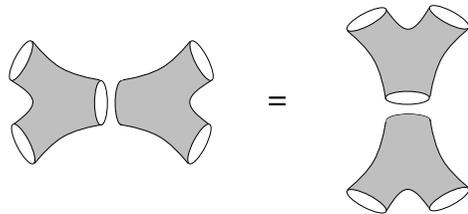
Jede Zustandssumme oder Korrelationsfunktion kann mit diesen Daten berechnet werden, da jede Fläche in Scheiben, Zylinder und Sphären mit drei Löchern zerlegt werden kann. Resultat sollte von Art der Zerlegung nicht abhängen.

- △ Symmetrie der „Hose“ impliziert $\eta(\phi \cdot \psi, \chi) = \eta(\phi, \psi \cdot \chi)$.



- △ Konsistenz verlangt außerdem, dass $\eta(\phi, \psi) = \langle \phi \cdot \psi \rangle_0$.

- △ Die wichtigste Bedingung ist jedoch die **Assoziativität** der Operatoralgebra, $(\phi \cdot \psi) \cdot \chi = \phi \cdot (\psi \cdot \chi)$.



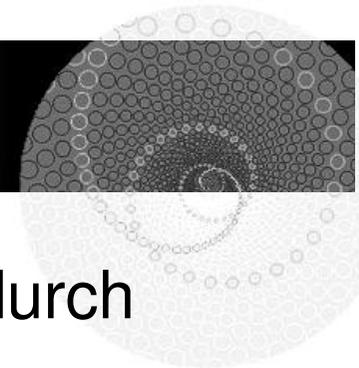
- △ Es gibt keine weiteren Bedingungen!

Konforme Feldtheorie (Definition)

Eine **konforme Feldtheorie** besitzt zusätzlich zu einer TFT folgende Strukturen: Bordismen sind Riemannsche Flächen Σ vom Geschlecht g und mit n markierten Punkten P_i zusammen mit einer Wahl von lokalen Koordinaten z_i , die die Ränder S^1 mit Parametrisierungen ausstatten.

- ⑥ Der Vektorraum V wird ersetzt durch einen Hilbertraum \mathcal{H} mit hermiteschem inneren Produkt.
- ⑥ Eine CFT ist ein Funktor $\Phi : \mathbf{Riem} \rightarrow \mathbf{Hilb}$.
- ⑥ Zu jeder Riemannschen Fläche mit parametrisierten Rändern $\Sigma \in \mathcal{P}_{g,n}$ wird ein Zustand $\Phi_\Sigma \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ assoziiert (da $\mathcal{H}^* \simeq \mathcal{H}$, brauchen wir nicht zwischen ein- und auslaufenden Zuständen zu unterscheiden).
- ⑥ Die Morphismen (**Vertexoperator**) hängen von der komplexen Struktur ab, $C_i \mapsto Y(\phi_i, z_i) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{End}(\mathcal{H})$.

Vertexoperator-Algebra



Als **Vertexoperator-Algebra** ist eine CFT gegeben durch die Axiome:

⑥ $\mathcal{H} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^{(n)}$ ist \mathbb{Z} -gradiert und besitzt eine Abbildung

$$Y : \begin{cases} \mathcal{H} & \rightarrow (\text{End } \mathcal{H})[[z, z^{-1}]] \\ \phi & \mapsto Y(\phi, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n) z^{-n-1}, \quad \phi(n) \in \text{End } \mathcal{H}. \end{cases}$$

⑥ Es gibt ein **Vakuum**, einen Zustand $\mathbf{1} \in \mathcal{H}^{(0)}$ mit $Y(\mathbf{1}, z) = \mathbb{I}$ und $Y(\phi, z)\mathbf{1} \in \mathcal{H}[[z]]$, $\lim_{z \rightarrow 0} Y(\phi, z)\mathbf{1} = \phi$.

⑥ Die Vertexoperator-Algebra besitzt ein assoziatives Operatorprodukt

$$Y(\phi, z) \cdot Y(\psi, w) = Y(Y(\psi, z - w)\phi, w).$$

Diese Eigenschaft wird auch **Dualität** genannt.

Konforme Symmetrie



Korrelatoren/Erwartungswerte sollen invariant unter konformen Transformationen der lokalen Koordinaten sein. Dies läßt sich wie folgt implementieren:

- Es gibt einen **Virasoro-Zustand** $\omega \in \mathcal{H}^{(2)}$ mit $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$, $L_n = \omega(n+1)$, erzeugt Virasoro-Algebra:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{1}{12}c(n^3 - n)\delta_{n+m,0}.$$

- Es gilt: $c \in \mathbb{C}$, $\forall \phi \in \mathcal{H}^{(n)} : L_0 \phi = n\phi$ und

$$[L_{-1}, Y(\phi, z)] = Y(L_{-1}\phi, z) = \frac{d}{dz}Y(\phi, z),$$

$$[L_0, Y(\phi, z)] = Y(L_0\phi, z) + zY(L_{-1}\phi, z),$$

$$[L_1, Y(\phi, z)] = Y(L_1\phi, z) + 2zY(L_0\phi, z) + z^2Y(L_{-1}\phi, z).$$

- $L_n \mathbf{1} = 0 \quad \forall n \geq -1$, $L_{-2} \mathbf{1} = \omega$, $L_0 \omega = 2\omega$.

Operatorprodukt-Entwicklung

Die einfache Operator-Algebra einer TFT geht nun in die folgende Form über:

△ Aus $C_i(\phi_j) = \phi_i \cdot \phi_j = \sum_k c_{ij}^k \phi_k$ wird

$$Y(\phi_i, z) \cdot Y(\phi_j, w) = \sum_k c_{ij}^k (z - w)^{h_k - h_i - h_j} V(\phi_k, w) + \dots$$

△ Vertexoperatoren generieren Höchstgewichtszustände von Darstellungen der CFT. Für $c \neq 0$ formen diese eine **Verlinde-Algebra**,

$$[h_i, c] * [h_j, c] = \sum_k N_{ij}^k [h_k, c] \quad \text{mit} \quad N_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{den}$$

Fusions-Koeffizienten.

△ Klassifikation dieser Fusions-Algebren ist ein wichtiges Problem in der konformen Feldtheorie.



Teil III

Logarithmische Konforme Feldtheorie

Probleme

Die Definitionen einer CFT als Funktor oder als Vertexoperator-Algebra können viele physikalisch wichtige Aspekte (noch) nicht erfassen.

- ⑥ Funktor $\Phi : \mathbf{Riem} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ strikt nur für $c = 0$ gegeben.
- ⑥ Vertexoperator-Algebren definieren strikt **meromorphe** konforme Feldtheorien, alle L_0 Eigenwerte bzw. Skalendimensionen h müssen $\in \mathbb{Z}$ sein.
- ⑥ Verallgemeinerung auf $h \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ mit \mathbb{Z}_2 gradierten Vektorräumen. Nicht-triviale Darstellungen der CFT sind (bis heute) nicht mathematisch rigoros zu behandeln.
- ⑥ Der Fall erweiterter holomorpher Symmetrie-Algebren $\mathcal{W} \supset \text{Vir}$ ist nur teilweise geklärt.
- ⑥ Keine mathematisch rigorose Formulierung der Operatoralgebra für $h \notin \mathbb{Z}$, $\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_{h_i}$, $\mathcal{H}_{h_i} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{h_i}^{(n)}$.

Riemannsche Flächen



In vielen physikalischen Anwendungen treten Riemannsche Flächen in einer alternativen Formulierung auf. Die von Physikern entwickelte Technologie zur expliziten Berechnung von Korrelatoren/Amplituden ist vor allem für $\Sigma = \mathbb{C}$ gut.

- ⑥ Riemannsche Flächen können als verzweigte Überlagerung der komplexen Ebene \mathbb{C} (oder auch \mathbb{CP}^1) aufgefasst werden,

$$y^n = \prod_{i=1}^{\ell} (z - e_i)^{a_i}, \quad \sum_i a_i \equiv 0 \pmod{n}.$$

Das Geschlecht von Σ ist $g = (n - 1)(\ell - 2)/2$.

- ⑥ Sind alle $a_i = 1$, ist Σ eine nicht-singuläre \mathbb{Z}_n -symmetrische Fläche.
- ⑥ Die Monodromien $\hat{\pi}_{e_i} : \text{Blatt } l \rightarrow \text{Blatt } (l + 1 \pmod{n})$ um e_i können alle simultan diagonalisiert werden.

Verzweigungs-Operatoren



Idee: Simuliere Verzweigungspunkt durch Operator. Mathematisch rigoros möglich z.B. für CFTs von j -Differentialen.

- ⑥ Die CFT der holomorphen 1-Differentiale hat $c = -2$. Für \mathbb{Z}_2 -symmetrische (hyperelliptische) Flächen ist der Verzweigungspunkt gegeben durch ein primäres Feld $\mu(z) \equiv V(\mu_{1/2}, z)$ mit $h_\mu = -1/8$.
- ⑥ Das Feld $V(\mu, z)$ erzeugt eine zulässige aber noch reduzible Höchstgewichtsdarstellung, Ideal erzeugt durch $V(L_{-2}\mu, z) - 2V(L_{-1}L_{-1}\mu, z) = 0$.
- ⑥ Solche Ideale implizieren Differentialgleichungen für Korrelatoren, z.B.

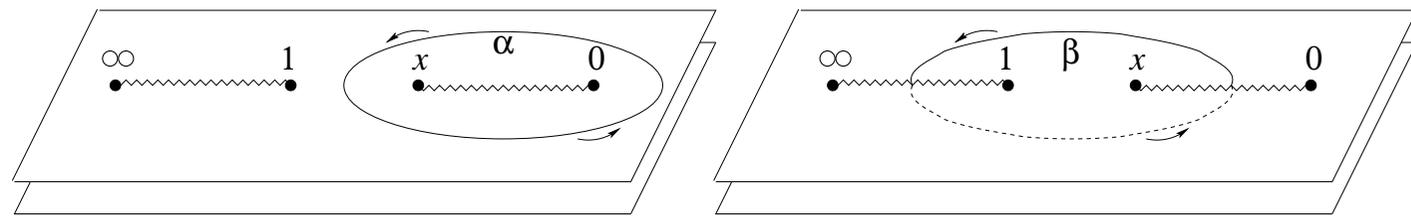
$$\begin{aligned} \langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle &= [x(1-x)]^{1/4} F(x), \\ \left[x(1-x)\partial_x^2 + (1-2x)\partial_x - \frac{1}{4} \right] F(x) &= 0. \end{aligned}$$

Verzweigungs-Operatoren



Die Lösung dieser Gleichung bringt eine Überraschung:

$$\langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle = [x(1-x)]^{1/4} \begin{cases} F^{(\alpha)} = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \\ F^{(\beta)} = \log(x) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) \\ \quad + \partial_\epsilon {}_3F_2\left(\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon, 1; 1 + \epsilon, 1 + \epsilon; x\right) \Big|_{\epsilon=0} \end{cases} .$$



Dies impliziert $[-\frac{1}{8}, -2] * [-\frac{1}{8}, -2] = [\tilde{0}, -2]$, wobei $L_0|\tilde{h}, c\rangle = h|\tilde{h}, c\rangle + |h, c\rangle$ eine **Jordan-Zelle** aufspannt. Die Darstellung $\mu * \mu$ ist also unzerlegbar.

Logarithmische CFT



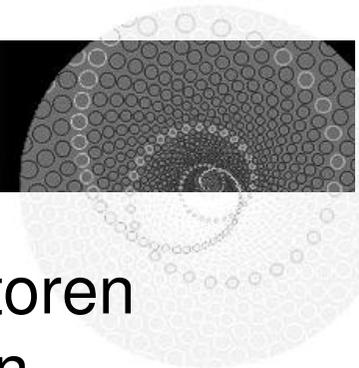
- ⑥ Unzerlegbare Darstellungen sind die definierende Eigenschaft von logarithmischer konformer Feldtheorie.
- ⑥ Korrelationsfunktionen müssen die *globalen konformen Ward-Identitäten* erfüllen, d.h. für $m = -1, 0, 1$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= L_m \langle \Psi_1(z_1) \dots \Psi_n(z_n) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n z_i^m \left[z_i \partial_i + (m+1)(h_i + \hat{\delta}_{h_i}) \right] \langle \Psi_1(z_1) \dots \Psi_n(z_n) \rangle . \end{aligned}$$

- ⑥ Im Fall von Rang $r > 1$ Jordan-Zellen von unzerlegbaren Darstellungen von Vir , erhalten wir

$$\hat{\delta}_{h_i} \Psi_{(h_j; k_j)} = \begin{cases} \delta_{i,j} \Psi_{(h_j; k_j-1)} & \text{wenn } 1 \leq k_j \leq r-1, \\ 0 & \text{wenn } k_j = 0. \end{cases}$$

Logarithmische CFT



- ⑥ Logarithmen brechen Skaleninvarianz. Korrelatoren dennoch invariant unter globalen konf. Abbildungen.
- ⑥ Generische Form der 1-, 2- und 3-pt Funktionen für Felder, die Jordan-Zellen von beliebigem Rang r formen:

$$\langle \Psi_{(h;k)} \rangle = \delta_{h,0} \delta_{k,r-1} ,$$

$$\langle \Psi_{(h;k)}(z) \Psi_{(h';k')}(0) \rangle = \delta_{h,h'} \sum_{j=r-1}^{k+k'} \eta_{(h,h';j)} \sum_{\substack{0 \leq i \leq k, 0 \leq i' \leq k' \\ i+i'=k+k'-j}} \frac{(\partial_h)^i}{i!} \frac{(\partial_{h'})^{i'}}{i'!} z^{-h-h'} ,$$

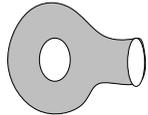
$$\langle \Psi_{(h_1;k_1)}(z_1) \Psi_{(h_2;k_2)}(z_2) \Psi_{(h_3;k_3)}(z_3) \rangle = \sum_{j=r-1}^{k_1+k_2+k_3} \mathcal{C}_{(h_1 h_2 h_3; j)}$$

$$\times \sum_{\substack{0 \leq i_l \leq k_l, l=1,2,3 \\ i_1+i_2+i_3=k_1+k_2+k_3-j}} \frac{(\partial_{h_1})^{i_1}}{i_1!} \frac{(\partial_{h_2})^{i_2}}{i_2!} \frac{(\partial_{h_3})^{i_3}}{i_3!} \prod_{\substack{\sigma \in S_3 \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} (z_{\sigma(1)\sigma(2)})^{h_{\sigma(3)} - h_{\sigma(1)} - h_{\sigma(2)}} .$$

LCFT = kranke CFT?

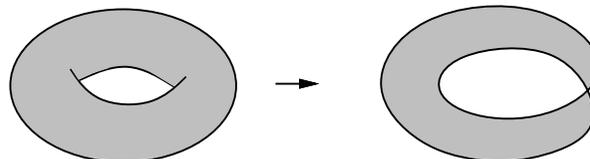
Zurück zu unserem Beispiel mit $c = -2$. Natürliche **Frage**: Ist dies eine pathologische CFT? **Antwort**: Nein, dies ist eine bona fide CFT.

⑥ Das Produkt $\mu(z)\mu(w)$ in einem Korrelator entspricht dem Einfügen eines Zylinders \mathbb{I} zwischen zwei Blättern.

⑥ Das Produkt aus $2(g+1)$ Feldern μ entspricht dem Einfügen von g Henkeln H , $H(x) = \sum_{i,j} c_i^{ij} V(\phi_j, x)$ .

Der Korrelator $\langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle_{g=0} \sim \langle H(x) \rangle_{g=0} = \langle \mathbb{I}_{\log q} \rangle_{g=1} = Z_{g=1}(q)$ entspricht daher den Torus-Zustandssummen. $Z_{g=1} = \text{Tr } \mathbb{I}_{\log q} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_0} q^{L_0 - c/24}$.

⑥ Was passiert, wenn zwei Verzweigungspunkte kollidieren?



LCFT = gute CFT

Diese CFT kann als rationale CFT konstruiert werden. Sie besitzt fünf zulässige Darstellungen, $[-\frac{1}{8}]$, $[\frac{3}{8}]$, $[1]$, $[0] \subset [\tilde{0}]$.

⑥ Für $z \rightarrow w$ degenerierte Situation im Modulraum,

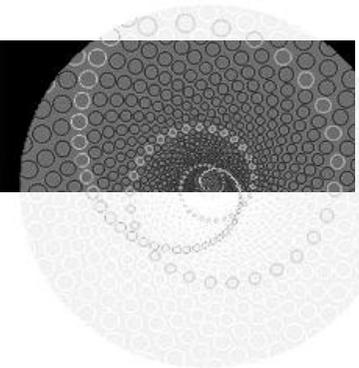
$$\mu(z)\mu(w) \sim (z - w)^{1/4} \left[\mathbb{I} + \left(\tilde{\mathbb{I}} - 2 \log(z - w) \mathbb{I} \right) \right],$$

wobei $\tilde{\mathbb{I}}$ ein **Punktierungs**-Operator ist, $\tilde{\mathbb{I}} \notin \mathcal{H}$.

⑥ Dennoch erfüllt CFT alle Kriterien für Rationalität, insbesondere die C_2 -Koendlichkeits-Bedingung von Zhu. Einziger Unterschied zu normaler rationaler CFT: Die Zhu-Algebra ist **nicht** halb-einfach.

⑥ Die Torus-Zustandssummen bilden endlich-dim. Darstellung von $PSL(2, \mathbb{Z})$. $\chi_h(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_h} q^{L_0 - c/24}$ mit $q = \exp(2\pi i \tau)$ erfüllt $\chi_i(-1/\tau) = \sum_{j \in I} S_{ij} \chi_j(\tau)$.

Modulinvarianz



Allerdings gibt es wieder eine Überraschung:

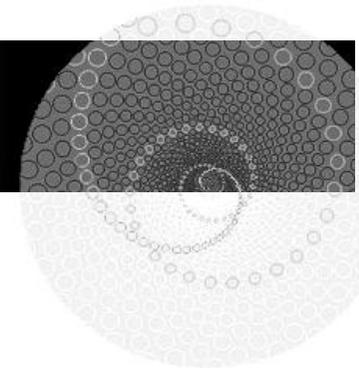
- Die Torus-Zustandssumme für die Vakuum-Darstellung ist $\chi_{\text{vak}}(\tau) = \frac{1}{2\eta(q)} (\theta_{1,2}(q) - \eta^3(q))$ mit

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad \text{und} \quad \theta_{\lambda,k}(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(2kn + \lambda)^2 / 4k}.$$

- Dies führt zu den Torus-Amplituden $\chi_{-1/8} = \theta_{0,2}/\eta$, $\chi_{3/8} = \theta_{2,2}/\eta$, $\chi_1 = (\theta_{1,2} + \eta^3)/2\eta$ und $\tilde{\chi}_0 = \frac{\alpha}{2\pi i} \log(q)\eta^2$. Für die unzerlegbare Darstellung ergibt sich $\chi_{\tilde{0}} = \theta_{1,2}/\eta$.
- Die Torus-Amplituden genügen einer verallgemeinerten Verlinde-Formel:

$$N_{ij}^k = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{r \in I} \frac{S(\alpha)_{ir} S(\alpha)_{jr} (S(\alpha)^{-1})_{rk}}{S(\alpha)_{0r}}.$$

Ebene vs. Torus



Dies ist eigentlich zu erwarten, denn:

⑥ Es gilt:

$$\tau = i \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; x\right)} = i \frac{\langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle_\alpha}{\langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle_\beta}.$$

⑥ Die Umkehrung ist $x(\tau) = \kappa^2(\tau) = 16 \frac{\eta(2\tau)^{16} \eta(\tau/2)^8}{\eta(\tau)^{24}}$.

⑥ In der Tat sind die Korrelatoren auf der Ebene äquivalent zu den Perioden auf dem Torus, bis auf den Liouville-Faktor $\Delta^{c/24}$ mit $\Delta = \prod_{i<j} (e_i - e_j)^2 = \eta^{24}$.

⑥ Genauer findet man:

$$\begin{aligned} \langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle_\alpha &= \chi_{\tilde{0}}(\tau) \eta^2(\tau/2), \\ \langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle_\beta &= \chi_{\tilde{0}}(\tau) \tilde{\chi}_0(\tau/2, \alpha = 1). \end{aligned}$$

Es ist $\eta^2(\tau/2) = \chi_{\text{vak}}(\tau/2) - \chi_1(\tau/2)$.

Abschließende Fragen

Es gibt zahlreiche weitere Beispiele wohldefinierter LCFT, die allen Anforderungen für rationale CFT genügen.

- ⑥ Wie lassen sich diese rigoros als Vertexoperator-Algebren formulieren?
- ⑥ Wie muss der Zustandsraum \mathcal{H} erweitert werden, so dass logarithmische Operatoren $\tilde{\mathbb{I}}$ darin vorkommen?
- ⑥ Wie ändert sich die Darstellung L_n der lokalen konformen Transformationen?

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{h}}(\lambda z) = \lambda^{-h} \left(\tilde{\Phi}_{\tilde{h}}(z) - \log(\lambda) \Phi_h(z) \right).$$

- ⑥ Wie übersetzt sich dies in das geometrische Bild?
- ⑥ Was bedeutet es, wenn die Zhu-Algebra nicht halbeinfach ist?
- ⑥ ...