Somewhere over the Rainbow

Vom Regenbogen zur Stringtheorie

Michael Flohr

Institut für Theoretische Physik ◇ Universität Hannover

Vom Regenbogen zur Stringtheorie

- Erste Erklärungsversuche . . .
  - Was ist ein Regenbogen?
- Was geometrische Optik nicht erklärt . . .
  - Was sind überzählige Bögen?
- Vom Nutzen exakter Lösungen . . .
  - Wie genau können wir den Regenbogen verstehen?
- Der Regenbogen in der Hochenergiephysik . . .
  - Was hat das bitte mit Stringtheorie zu tun?
- Statt einer Zusammenfassung . . .
  - Somewhere over the Rainbow

Eine Brücke

Der Regenbogen ist bis heute ein Phänomen, dem wir uns meist mit den Mitteln der Poesie nähern, das lange als übernatürlich galt, und das erst spät im letzten Jahrhundert vollständig wissenschaftlich erklärt wurde.

Die vollständige Erklärung muss modernste Vorstellungen über Licht, Wasser und Regentropfen verwenden, wie zum Beispiel die Quantenmechanik.

Der Regenbogen ist ein wunderbares Beispiel, wie theoretische Physik funktioniert. Wir begegnen dabei Methoden, die auch in allerneusten Modellen wie der Stringtheorie eine Rolle spielen.

Beispiel

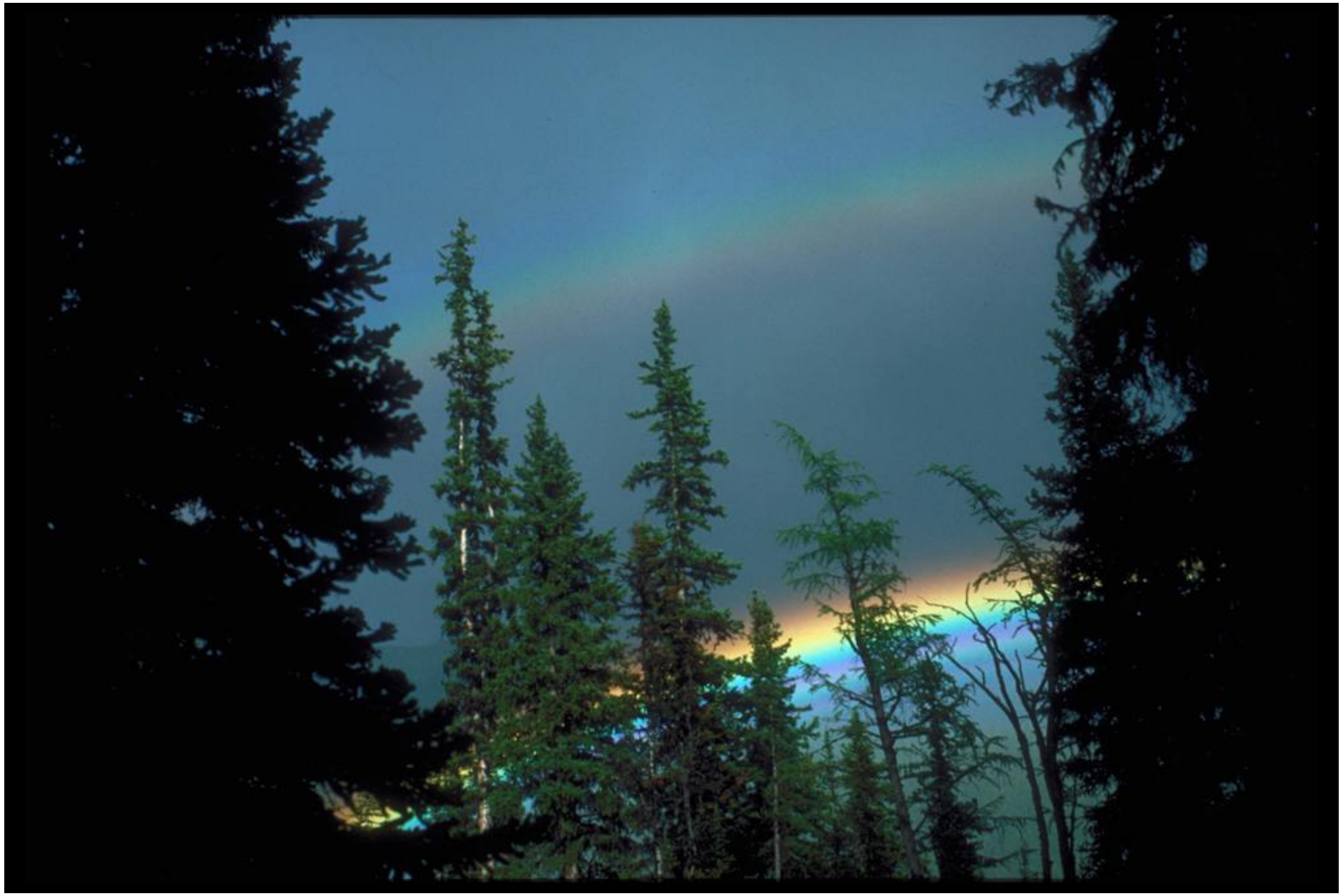
- Ein typischer Regenbogen

Noch ein Beispiel

- Wie dick ist der Regenbogen?

Ein letztes Beispiel

- Die überzähligen Bögen



Erste Erklärungen

- **Was ist ein Regenbogen?** Erste rationale Erklärung vermutlich durch Aristoteles (384 – 322 v.Chr.): Der Regenbogen ist eine ungewöhnliche Reflektion von Sonnenlicht an Wolken.
- Die Reflektion erfolgt unter einem festen Winkel, womit Aristoteles korrekt die Bogenform erklärt. Der Regenbogen ist kein materielles Objekt am Himmel, sondern ergibt sich aus solchen Richtungen, entlang derer Lichtstrahlen in die Augen des Beobachters reflektiert werden.
- **Wo ist der Regenbogen?** Erste Messung des Winkels zwischen einfallendem Sonnenlicht und dem Regenbogen 1266 durch Roger Bacon: Der Winkel beträgt 42°. Der zweite Bogen erscheint etwa 8° höher.

17 Jahrhunderte später

- **Wie entsteht ein Regenbogen?** Der Mönch Theodor aus Freiberg schlug 1304 vor, dass jeder einzelne Tropfen in der Lage ist, einen Regenbogen zu produzieren.
- Bestätigung durch Experiment mit einer kugelförmigen mit Wasser gefüllten Flasche.
- Die Resultate von Theodor blieben für drei Jahrhunderte weitgehend unbekannt, wurden dann von Descartes 1637 erneut entdeckt.
- Die große Leistung von Theodor und Descartes war, zu realisieren, dass man die wesentlichen Eigenschaften eines Regenbogens verstehen kann, wenn man versteht wie Licht durch einen einzelnen Tropfen dringt.

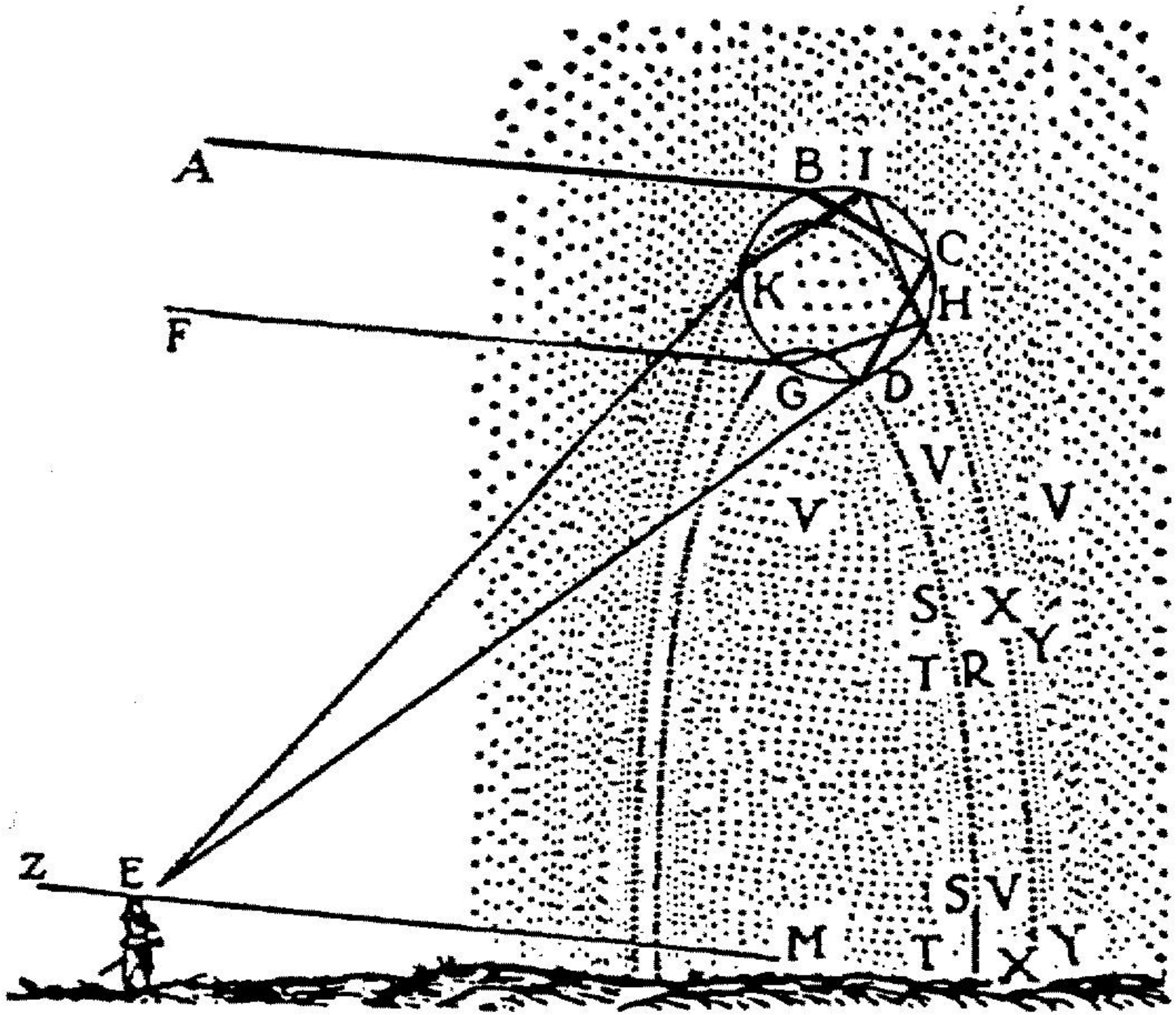
Descartes

- **Discours de la Methode:** *Als mir klar wurde, dass der Bogen nicht nur im Himmel erscheint, sondern auch in der Luft in unserer Nähe, sobald dort Wassertropfen von der Sonne beschienen werden, wie wir es bei manchen Fontänenbrunnen sehen können, kam ich sofort zu dem Schluss, dass er allein durch die Art und Weise bestimmt ist, wie Lichtstrahlen auf diese Tropfen wirken und von ihnen zu unseren Augen gelangen. Wissend, dass die Tropfen rund sind, was zuvor gezeigt worden ist, und erkennend, dass die Erscheinung des Bogens in keiner Weise sich ändert, ob die Tropfen nun kleiner oder größer sind, kam mir die Idee, einen sehr großen Tropfen zu machen, so dass ich ihn besser studieren konnte.*

Descartes

Die originale Zeichnung von Descartes aus seinem *Discours de la Methode* von 1637.

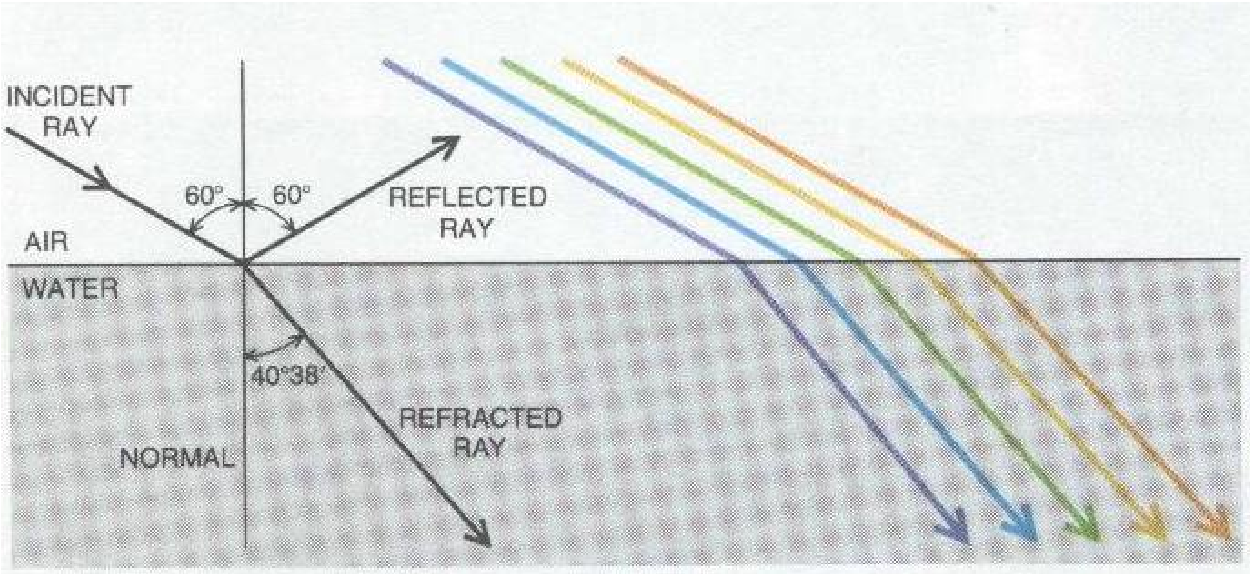
Der Regenbogen à la Descartes ist übrigens weiß.



Spiegelung & Brechung

Zwei Prinzipien bestimmen den Regenbogen:

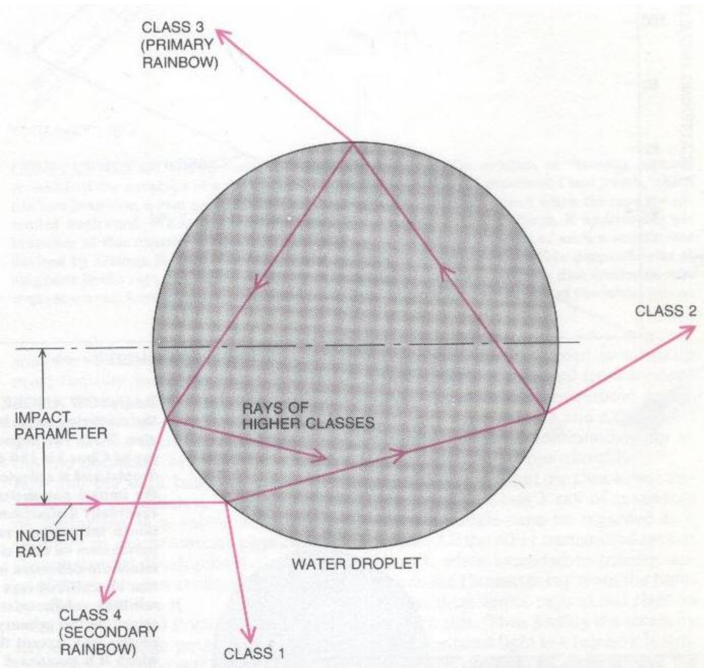
- **Reflektion:** Einfallswinkel $=$ Ausfallswinkel, unabhängig von Lichtfrequenz und Material des Spiegels.
- **Refraktion:** Brechungswinkel abhängig von den Materialien (Willebrord Snell 1621): $\dfrac{\sin\angle(\text{ein})}{\sin\angle(\text{aus})} = \dfrac{n_{\text{ein}}}{n_{\text{aus}}}$ und Frequenz des Lichtes (Isaac Newton 1666): $n = n(\omega)$.

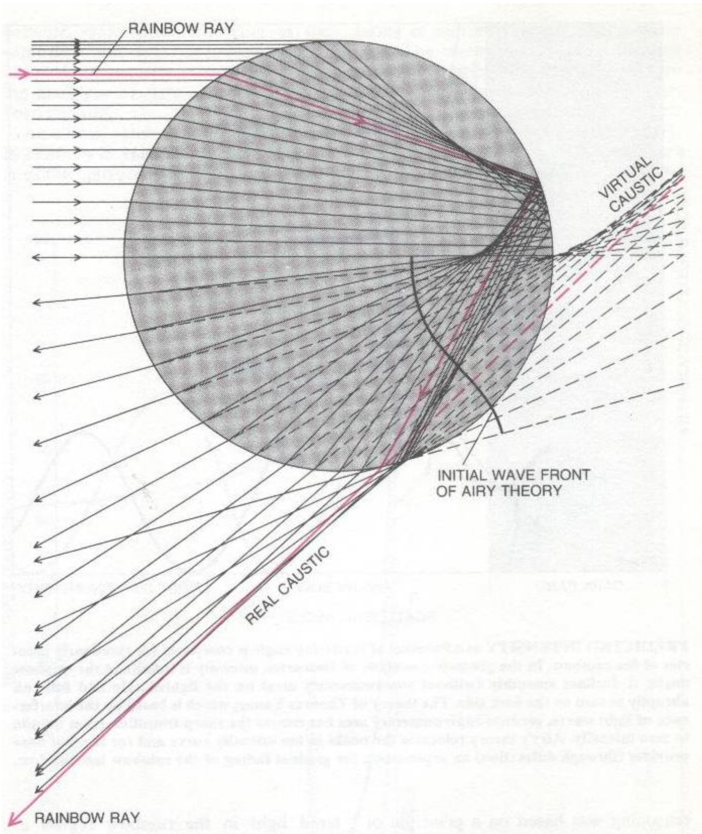


Wieviele Regenbögen gibt es?

Das Licht kann mehrfach im Tropfen gebrochen und gespiegelt werden. Dabei verringert sich jedesmal die Helligkeit.

- **Hauptregenbogen:** Brechung, Spiegelung, Brechung.
- **1. Nebenregenbogen:** Brechung, 2 Spiegelungen, Brechung.

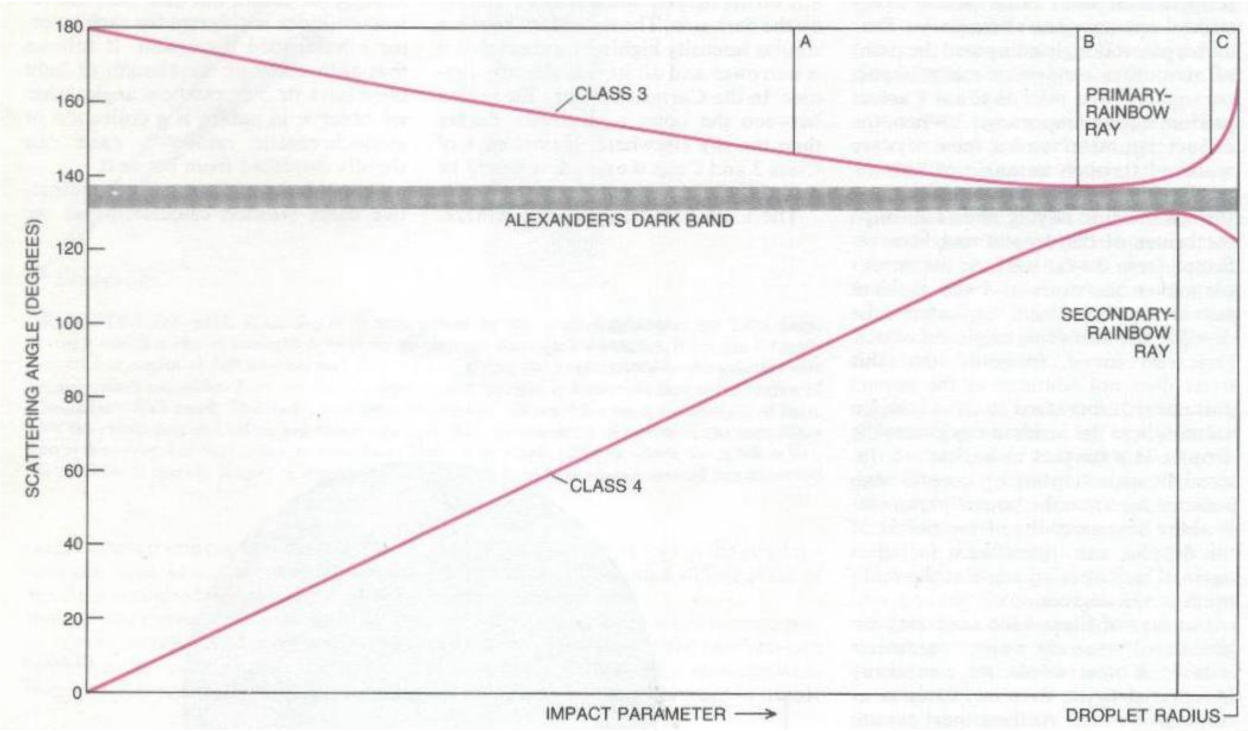


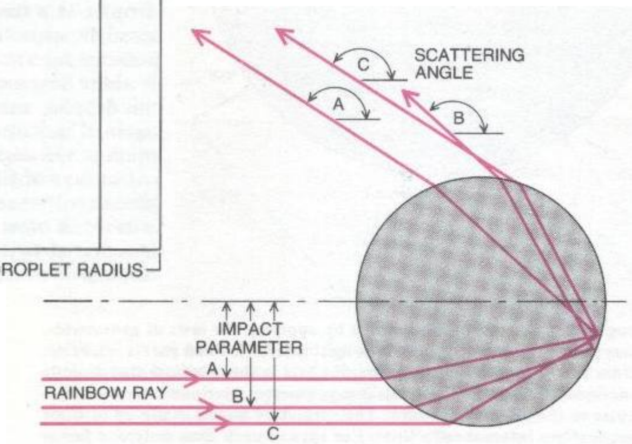


Der Regenbogenwinkel

Jeder Regenbogen hat einen „scharfen“ Rand.

- **Alexander-Spalte:** Zwischen Haupt- und 1. Nebenregenbogen wird kein Licht reflektiert.

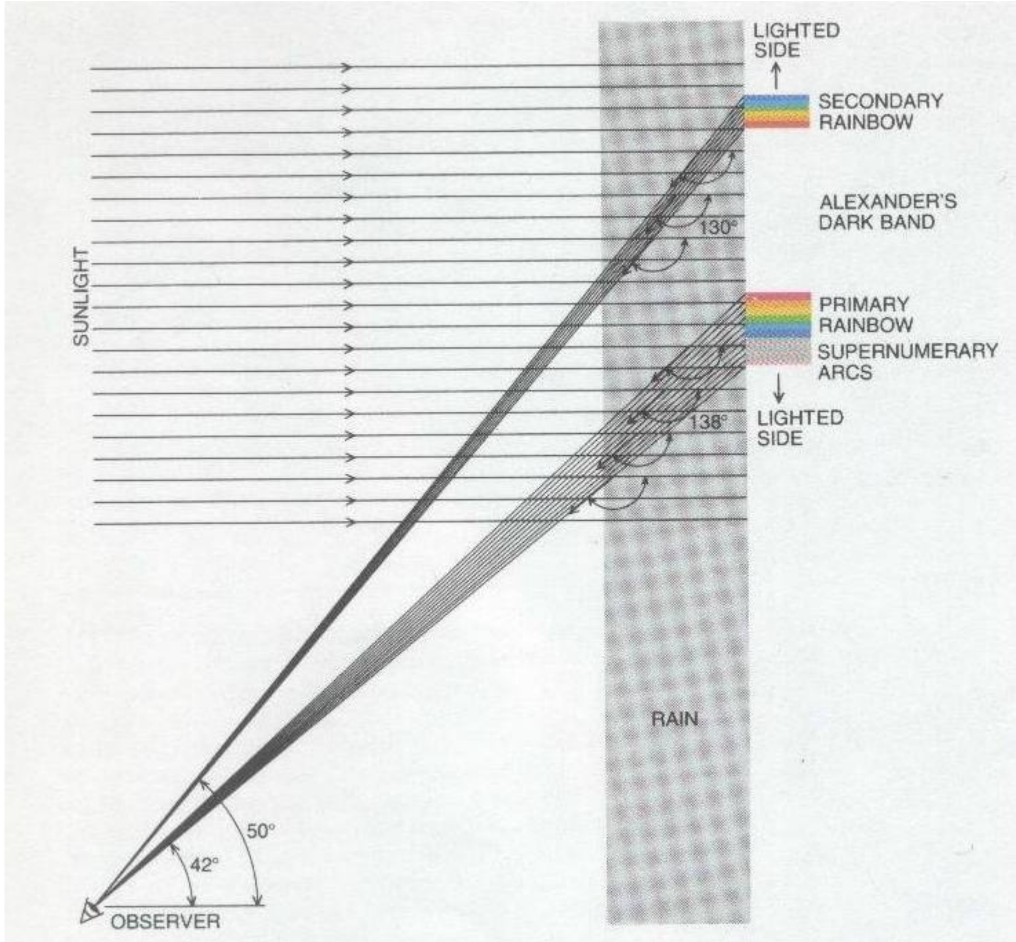




Newton

Newton berechnete den Regenbogenwinkel zu $137^\circ\,58'$ für rotes Licht und zu $139^\circ\,43'$ für violettes Licht. Der Regenbogen wäre also $1^\circ\,45'$ breit. In Wirklichkeit ist er aber $2^\circ\,15'$ breit, weil die Sonne nicht punktförmig ist.

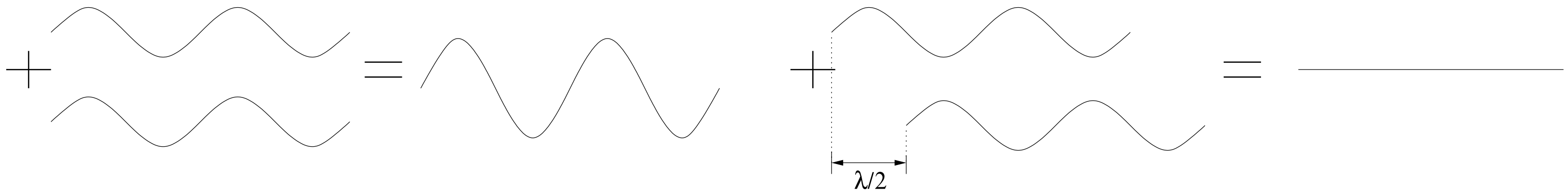
Die Sonne hat eine scheinbare Größe von etwa einem halben Grad $\Longrightarrow$ die Strahlen kommen nicht alle parallel an.



Interferenz

Descartes und Newton können die überzähligen Bögen nicht erklären.

- **Licht als Welle:** Licht kann interferieren (Thomas Young 1803). Lichtwellen können sich addieren oder auch auslöschen, wie bei Wasserwellen.
- **Überzählige Bögen:** Entstehen, weil Lichtstrahlen, die in die gleiche Richtung reflektiert werden, unterschiedliche Wege laufen.



Unterschiedliche Weglängen $\Longrightarrow$ jede Frequenz variiert periodisch in ihrer Intensität. Dieser Effekt hängt von Form und Größe der Tropfen ab!

Wo Schatten ist, ist auch Licht

Young kann alle direkt sichtbaren Eigenheiten des Regenbogens qualitativ erklären. Allerdings versagt seine Theorie bei der Alexander-Spalte, die viel zu dunkel wäre.

- **Beugung:** Lichtwellen werden an Kanten gebeugt. Schatten haben daher keine scharfen Ränder.

Kann man quantitativ korrekt die Intensität des gestreuten Lichtes allein aus Tropfengröße und Streuwinkel vorhersagen?

- **Kaustiken:** Problem der Beugung schwierig. Die „Kante“ ist hier die Kante einer Kaustik, einer Intensitätskatastrophe von reflektierem Licht wie die helle Spitze, die man manchmal in einer sonnenbeschienenen Tasse Tee sieht (Richard Potter 1835).

Airy Theorie

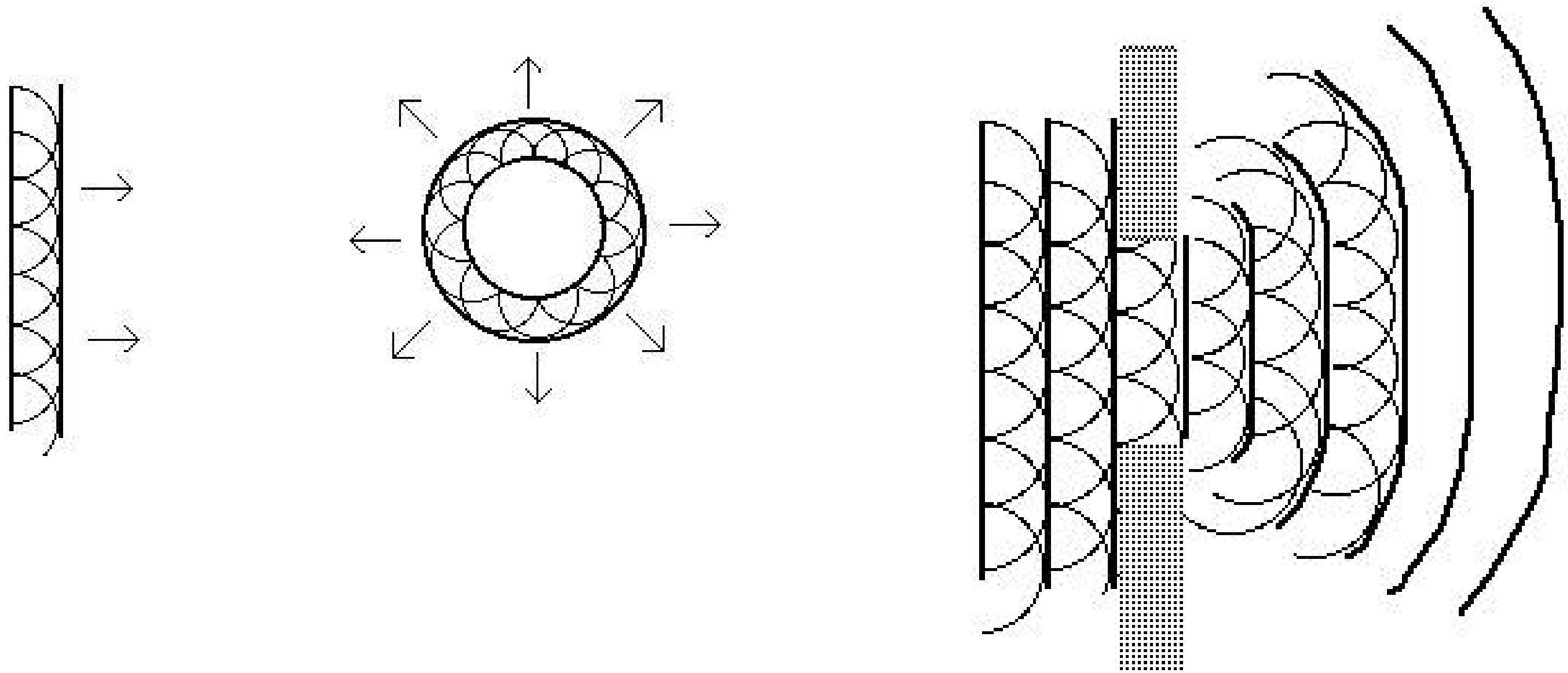
Erste quantitative Theorie wurde 1838 von George B. Airy entwickelt.

- **Prinzip von Huygens:** Jeder Punkt einer Wellenfront ist Quelle von Kugelwellen, die ihrerseits eine neue Wellenfront bilden (Christiaan Huygens, Augustin Jean Fresnel).
- **Propagation:** Kennt man die Amplitude des Lichtes entlang einer Wellenfront, kann man sie für jede andere Wellenfront rekonstruieren.

Leider ist diese Amplitudenverteilung nicht exakt bekannt $\Longrightarrow$ „raten" und am Ergebnis prüfen, ob man gut geraten hat. Airy wählte seine Wellenfront sehr sorgfältig und schätzte die Amplitude des Lichtes mit Hilfe damaliger optischer Theorien ab.

Prinzip von Huygens

- Jeder Punkt einer Wellenfront ist Quelle von Kugelwellen. Die Einhüllende dieser Kugelwellen bildet die neue Wellenfront.
- Trifft eine Welle auf ein Hindernis, verformt sich die Wellenfront daran.

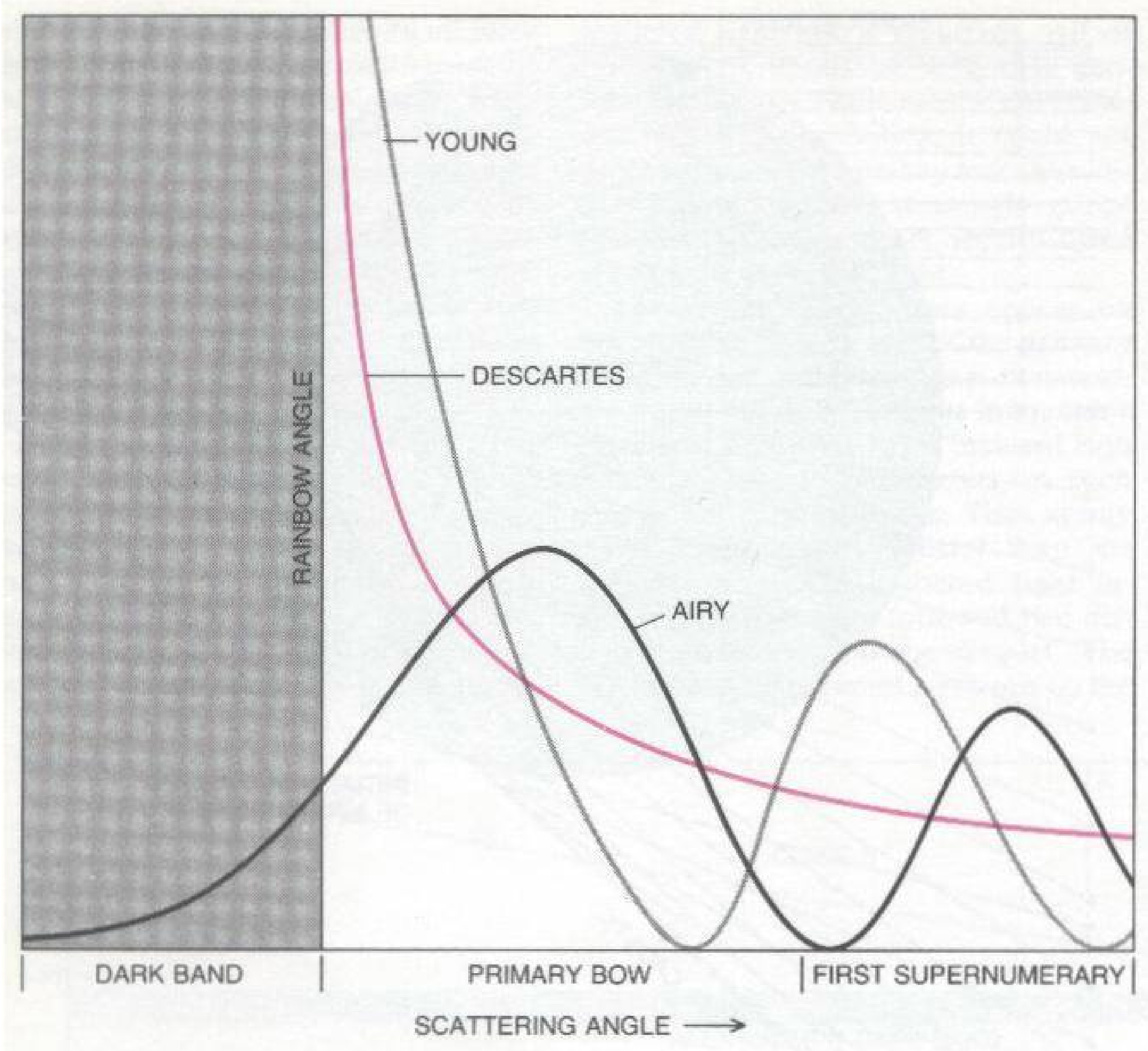


Airy

Vergleich der bisherigen Theorien:

Nur in der Airy Theorie ist die Alexander-Spalte nicht völlig dunkel.

Nachteil: Anfangsbedingung muss man raten, das Resultat ist sehr mathematisch und kompliziert.

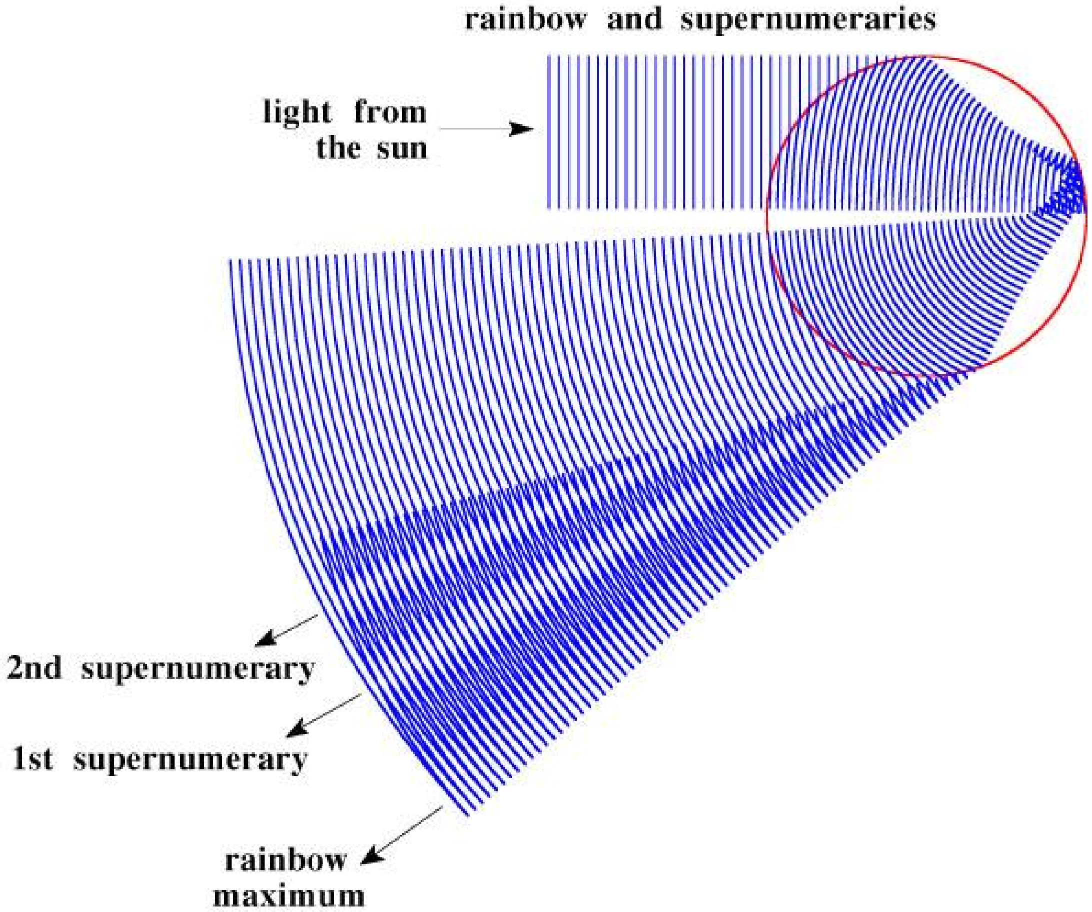


Sind alle Regenbögen gleich?

Resultat von Airy ist für einfarbiges Licht $\Longrightarrow$ man muss alle Farben des Spektrums der Sonne überlagern.

Große Tropfen (1–5 mm) geben helle Regenbögen mit reinen Farben.

Bei sehr kleine Tropfen (0.01 mm) überlappen die Farben so sehr, dass der Bogen nahezu weiß erscheint.

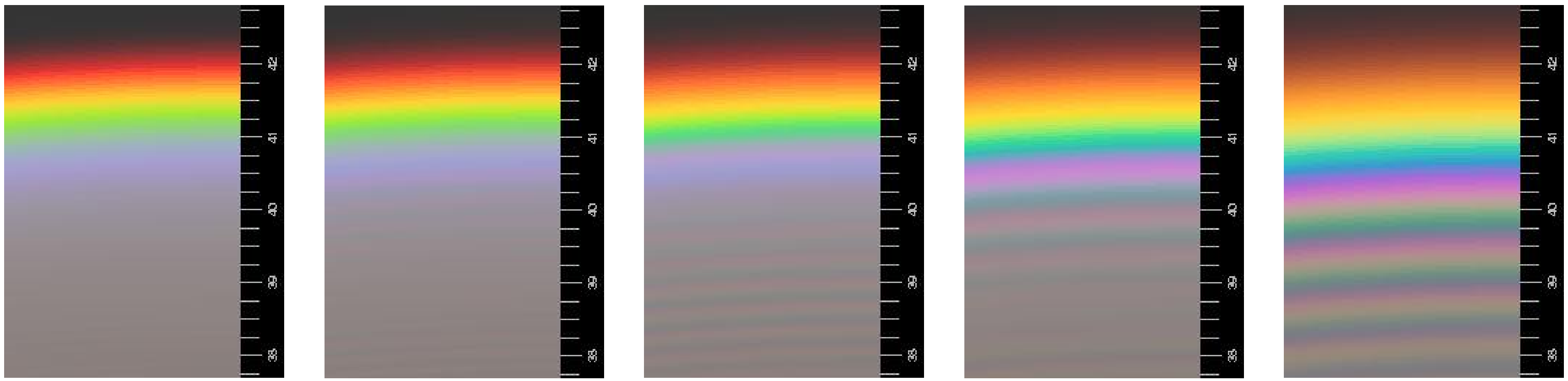


Die exakte Lösung

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Dafür gibt es eine vollständige und exakte Theorie, die Elektrodynamik (James Clerk Maxwell 1873):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho\,, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}\,, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}}\,.$$

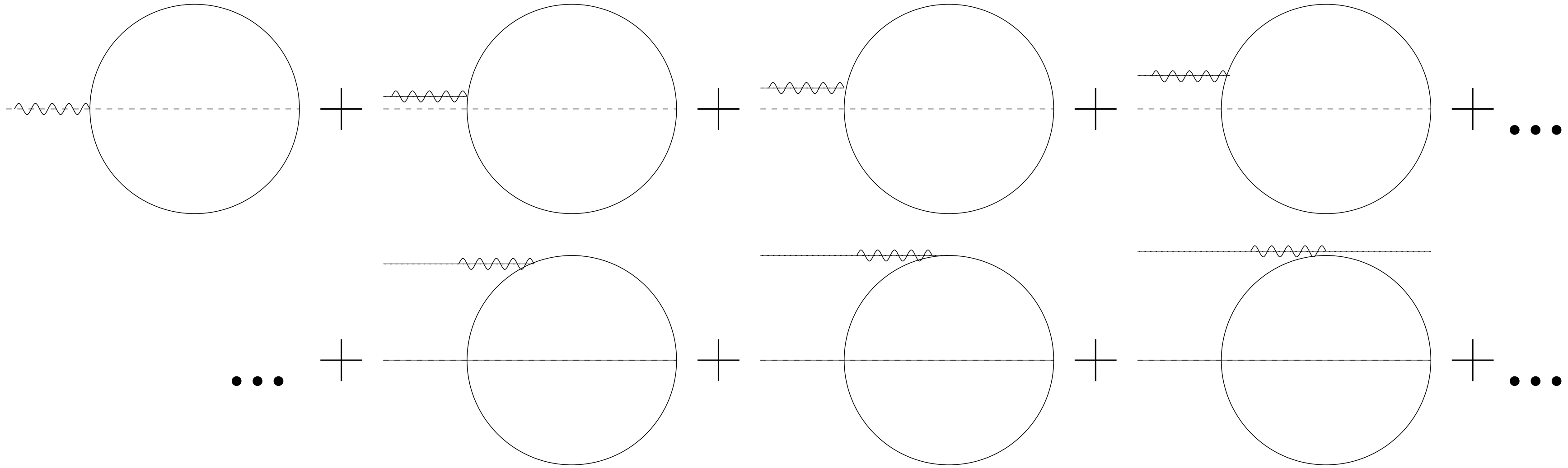
Problem des Regenbogens = Streuung einer ebenen Welle an einer homogenen Kugel. (Gustav Mie, Peter J.W. Debye 1908).



2 mm | 1.4 mm | 1 mm | 0.7 mm | 0.5 mm

Vom Nutzen exakter Lösungen

- Lösung von Mie ist unendliche Summe komplizierter Terme.
- Kann nur mit Hilfe von Computern näherungsweise berechnet werden.
- Resultat genau aber ohne physikalische Anschauung.
- **Partialwellen:** Symbolisch sieht die Lösung für eine Wellenlänge so aus:

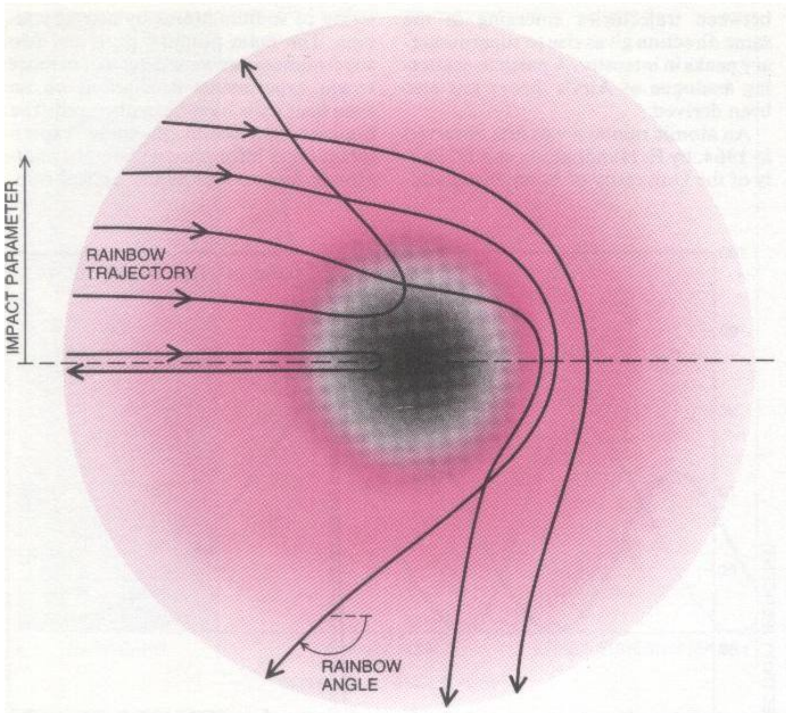


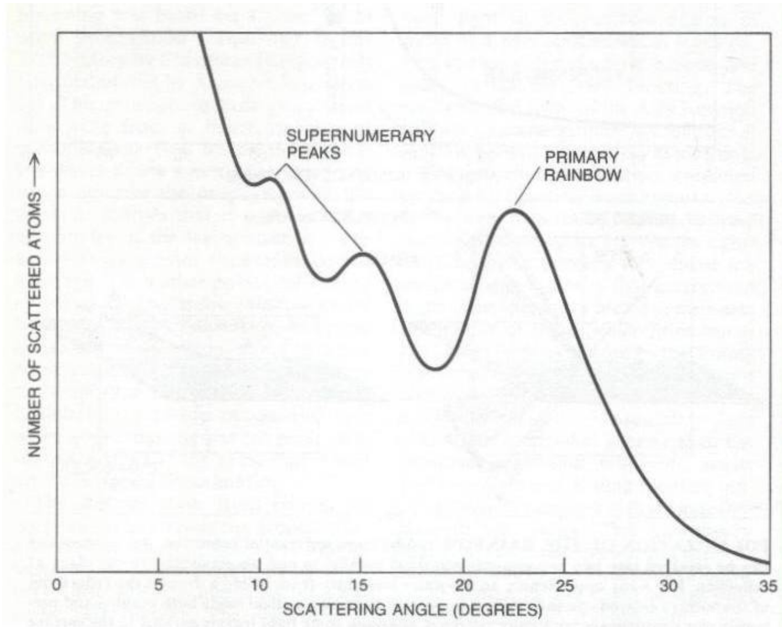
Photonen

- Licht verhält sich auch wie Teilchen $\Longrightarrow$ Photonen.
- Stoß von Photonen auf Tropfen(moleküle) überträgt Drehimpuls abhängig vom Stoßparameter.
- **Quantenmechanik:** Wellenlänge λ und Stoßparameter b sind nicht beide beliebig genau bestimmt, $(\Delta b)(\Delta p) \geq \hbar$ mit $p = \hbar/\lambda$.
- **Quantenmechanik:** Der Drehimpuls kann nur feste Werte annehmen: $\hbar\ell = b\,p$ mit $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- Für einen Tropfen mit Durchmesser d muss man Partialwellen für mindestens alle Werte $\ell = 0, 1, \ldots, \pi d/\lambda$ berechnen.
- Für Nebeltropfen sind das $\sim$ 100 Terme, für normale Regentropfen sind es viele tausend Terme.

Regenbögen in der Teilchenphysik?

- Streutheorie und Partialwellen sind wichtige Werkzeuge in vielen Gebieten der Physik (Kernphysik, Teilchenphysik, . . .). Beispiel: *Na* Streuung an *Hg*.
- Sehr kleine Teilchen verhalten sich quantenmechanisch, haben auch Wellencharakter, zeigen Interferenz.





E. Hundhausen, H. Pauly 1961

Mathematische Trickkiste

- Partialwellenzerlegung konvergiert sehr schlecht.
- Es ist möglich, diese unendliche Summe in ein leichter handhabbares Integral umzuwandeln, wenn man für den Drehimpuls ℓ sogenannte komplexe Zahlen erlaubt (Henri Poincaré und G.N. Watson):

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell+\frac{1}{2}, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-im\pi} \int_0^{\infty} f(\lambda, x)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m\lambda} \mathrm{d}\lambda\,, \quad \lambda = \ell+\frac{1}{2}\,.$$

- **Komplexe Zahlen:** Zahlen, die aus einem reellen Anteil und einem imaginären Anteil bestehen. Imaginäre Zahlen sind Wurzeln aus negativen Zahlen, $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$.
- Nach der Umformung steckt alle wichtige Information in den Polen und Sattelpunkten des Integranden.

Nur Mathematik?

Die komplexen Drehimpulswerte der Pole und Sattelpunkte haben physikalische Bedeutung!

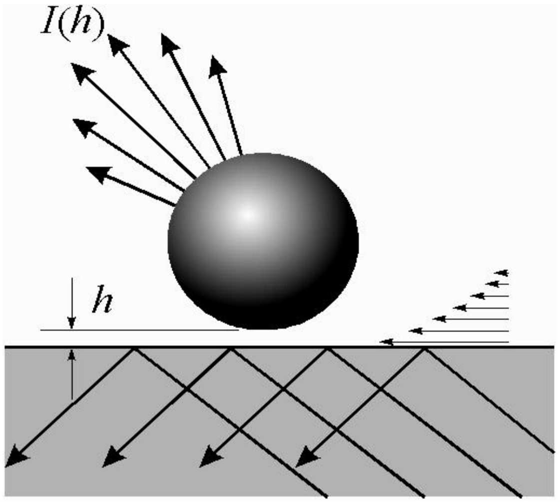
- **Reelle Sattelpunkte:** Beiträge gewöhnlich reflektierter und gebrochener Lichtstrahlen zu den Partialwellen.
- **Imaginäre Sattelpunkte:** Vollständig innere Reflektion von Licht am Tropfenrand – sogenannte evanescente Wellen, die am Rand entlanglaufen und nur wenig aus dem Tropfen dringen (Tunneleffekt).
- **Regge Pole:** Beiträge von Lichtwellen, die den Tropfen tangential treffen – sogenannte Oberflächenwellen, die kontinuierlich Strahlung abgeben.

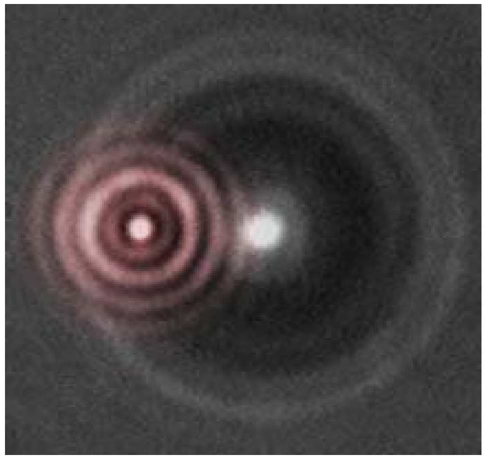
Methode komplexer Drehimpulse ist wertvolles Werkzeug der Hochenergie-Physik. Pole der Streuamplituden können zum Beispiel mögliche Elementarteilchen „verraten“.

Evanescente Wellen

Keine Brechung aus dichterem in dünneres Medium jenseits des kritischen Winkels. Sehr wenig Licht wandert parallel zur Oberfläche mit exponentiell abfallender Intensität.

- **Anwendung:** Evanescente Wellen in der Mikroskopie können Unebenheiten in der Größenordnung $\sim 1\,\mathrm{nm}$ ($\ll$ Wellenlänge des Lichtes!) sichtbar machen.
- Intensität des Streulichtes von durchsichtiger ($\sim 6\,\mu$m) Kugel, die von evanescenten Wellen beschienen wird.



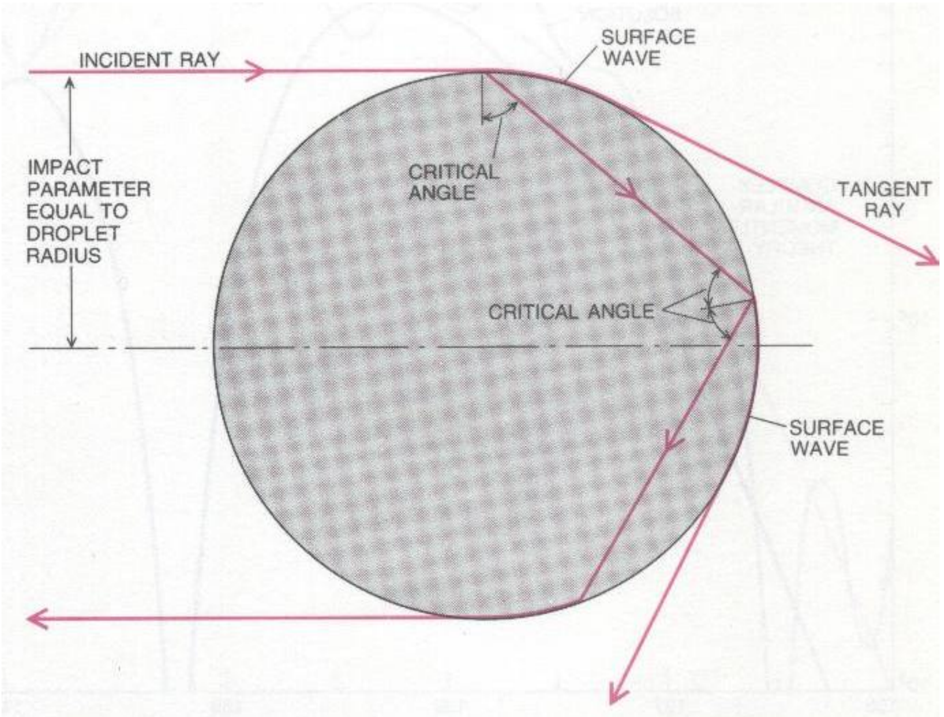


Regge Pole

Wichtig in Kern- und Hochenergie-Physik:

Die Regge Pole wurden in den 70ern heftig diskutiert. Experimente lieferten sehr viele neue Teilchen, deren Regge Pole sich wie Perlenschnüre aufreihen.

Versuche dies zu verstehen führten zur Entwicklung der **Stringtheorie**!



Streu-Amplituden

Spektrum der Hadron-Resonanzen legt die Beziehung $J = \Re\mathrm{e}(\lambda) = \alpha(m^2) \sim \alpha_0 + \alpha' m^2$ nahe, die Regge-Trajektorien.

- **Problem:** Quantenfeldtheorien lassen sich für Felder mit Spin $J \geq 2$ nicht konsistent definieren.
- **Lösung?** Die Divergenzen lassen sich vielleicht beheben, wenn *alle* Spins $J = 0, 1, \ldots, \infty$ auftreten.
- **Nochmal Mathe-Magie:** Die Streu-Amplitude ist

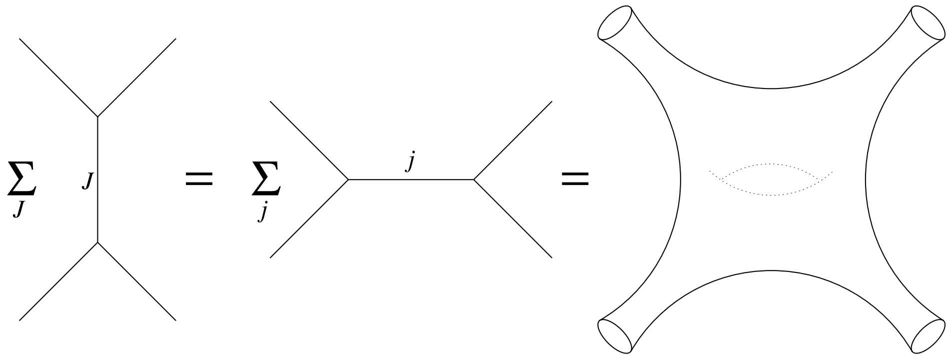
$$
\begin{aligned}
A(s,t) &\sim \sum_J a_J P_J(z_t = \cos\theta_t) \text{ mit } z_t \sim 1 + \frac{2s}{t - 4m^2} \\
&\sim \sum_j \beta_j(t) s^{\alpha_j(t)} ,
\end{aligned}
$$

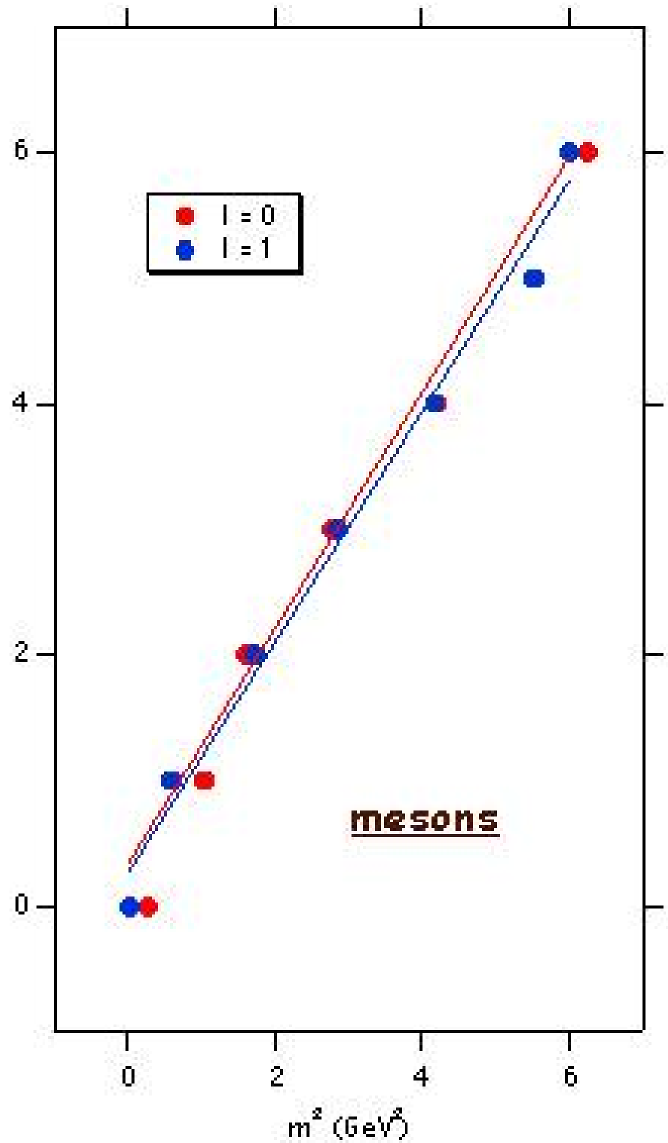
Partialwellen im s-Kanal $\longleftrightarrow$ Trajektorien im t-Kanal.

Stringtheorie

Das funktioniert, wenn die Streu-Amplitude Dualität besitzt:

$$A(s,t) \sim \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))}\,.$$

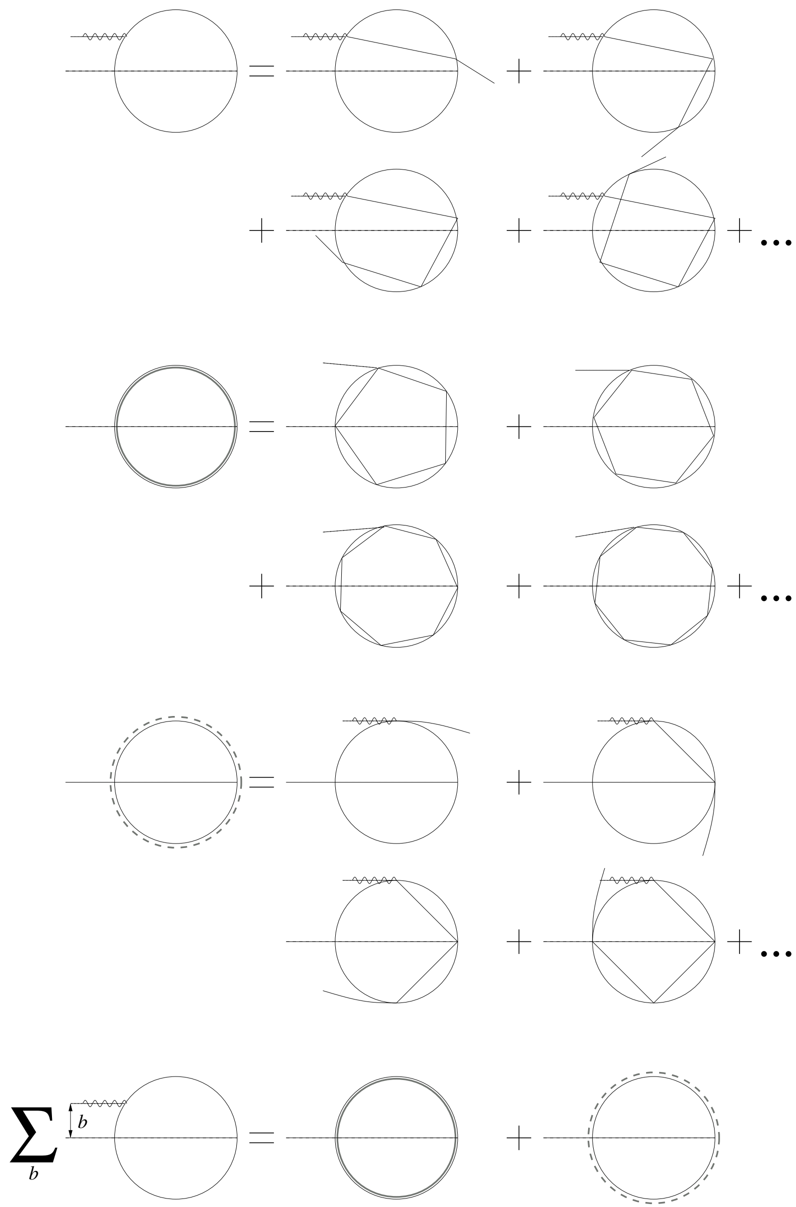




Das resultierene Spektrum ist das einer schwingenden Saite! Alte Vorstellung: Quarks in Mesonen sind durch Saiten (strings) verbunden.

Watson Transformation

Symbolisch kann man die mathematische Trickkiste so darstellen:

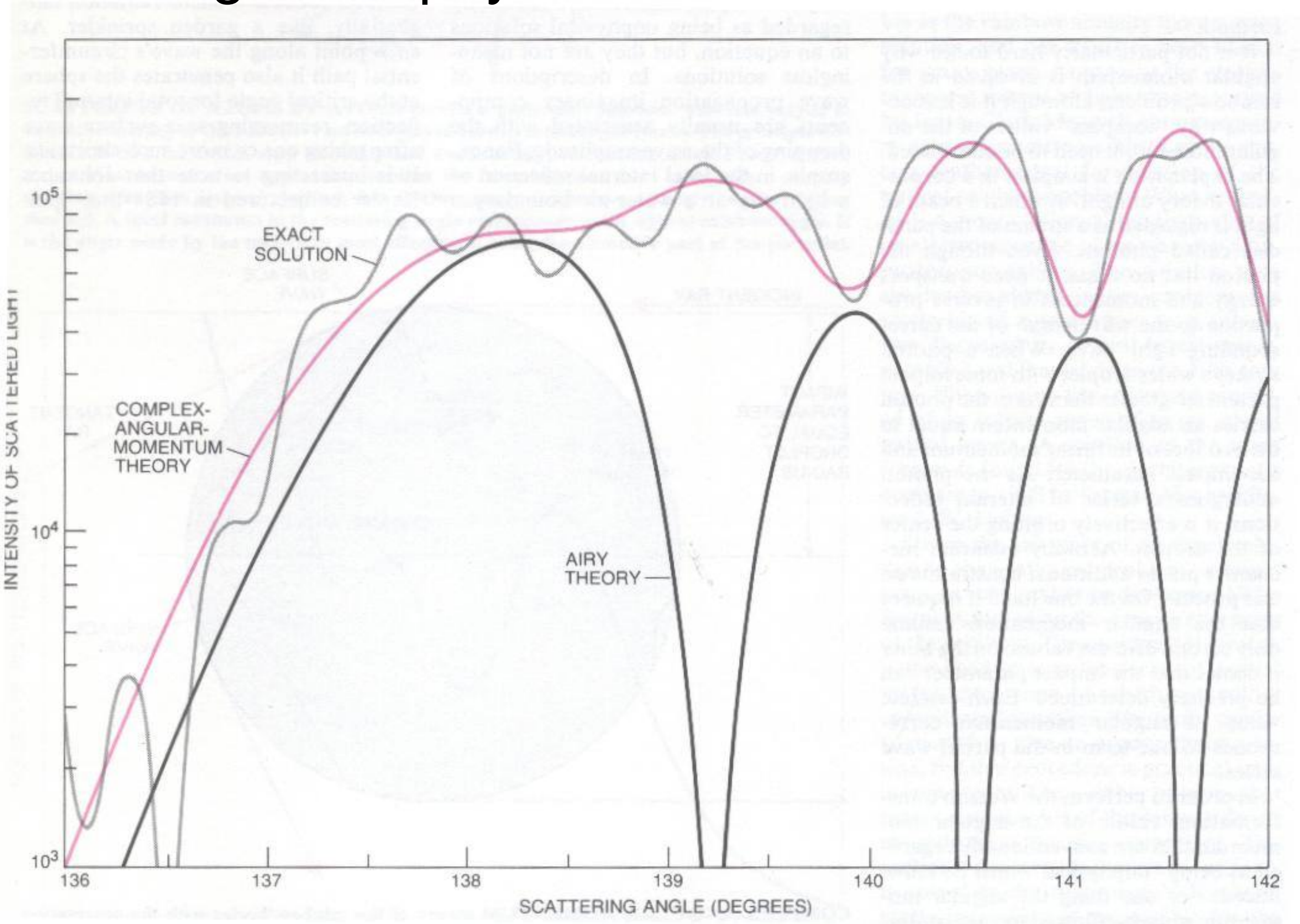


Die unendliche Summe über komplizierte Terme wird ersetzt durch nur zwei Ausdrücke, die leichter zu berechnen sind.

Summe aller Partialwellen = Evanescente Wellen und Oberflächenstrahlung.

Lohn der Mühe

Auswerten weniger komplexer Pole und Sattelpunkte liefert bereits sehr gute Näherung. Außerdem liefert die umgeformte Lösung mehr physikalische Information.



Ist der Regenbogen jetzt schöner?

Somewhere over the rainbow
Way up high,
There's a land that I heard of
Once in a lullaby.

Somewhere over the rainbow
Skies are blue,
And the dreams that you dare to dream
Really do come true.

Someday I'll wish upon a star
And wake up where the clouds are far
Behind me.
Where troubles melt like lemon drops
Away above the chimney tops
That's where you'll find me.

Somewhere over the rainbow
Bluebirds fly.
Birds fly over the rainbow.
Why then oh why can't I?

If happy little bluebirds fly
Beyond the rainbow
Why oh why can't I?

[aus: THE WIZARD OF OZ
Text: E.Y. HARBURG
Musik: HAROLD ARLEN]