Konforme Feldtheorie auf der Ebene und dem Torus: Über einen Zusammenhang von Vierpunkt-Korrelationsfunktionen und Torus-Amplituden

– Diplomarbeit –

Sergej Mikheev

angefertigt am

Institut für Theoretische Physik

Leibniz Universität Hannover

Germany

August 2009

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird der Zusammenhang zwischen Vierpunkt-Korrelationsfunktionen auf der Ebene und Null- und Einpunktamplituden auf dem Torus in den minimalen Modellen mit der zentralen Ladung $c = 1/2$, $c = -22/5$, $c = 7/10$ und $c = 4/5$ untersucht. Dabei werden ausschließlich Vierpunktfunktionen von konformen Feldern, die auf dem zweiten Level degeneriert sind, betrachtet, so dass die konformen Blöcke dieser Korrelationsfunktionen als Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung gegeben sind. Es zeigt sich, dass man unter der gemachten Annahme über die modularen Größen nicht alle Vierpunktfunktionen der betrachteten Theorien sinnvoll durch die zugehörigen minimalen Charaktere ausdrücken kann. Auf Grund dessen wird ein Ansatz zur Verallgemeinerung der modularen Gleichung formuliert: Es wird gezeigt, wie der verallgemeinerte modulare Parameter auf natürliche Weise durch bestimmte Korrelationsfunktionen der jeweiligen minimalen Theorie ausgedrückt werden kann. Anschließend werden einige numerische Berechnungen mit neuen modularen Größen wiederholt.

Abstract

In the presented work the relation of CFT four-point correlation functions on the plane to torus zero- and one-point amplitudes in the minimal models with central charge $c = 1/2$, $c = -22/5$, $c = 7/10$ and $c = 4/5$ was studied.
We focus here The centre solely on four-point functions of conformal fields which are degenerate at level two. As a consequence, the conformal blocks of these correlators are given as solutions to the hypergeometric differential equation. It shows that the modular parameter used to compute the four-point correlators in terms of minimal characters yields only in a few cases the desired result. Hence, a generalized modular equation is formulated. We show how the generalized modular parameter can be chosen as a characteristic of each minimal model mentioned above. In the concluding chapter some numerical calculations with the new modular quantities are performed.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Konforme Feldtheorie hat sich in den letzten zwanzig Jahren zu einem bedeutenden Gebiet der modernen theoretischen Physik entwickelt, das eine zentrale Rolle bei der Beschreibung von Phasenübergängen in zweidimensionalen Systemen sowie in der String-Theorie spielt. Das Fundament für diese Entwicklung wurde 1984 von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov mit ihrer Arbeit [5] gelegt. In der Veröffentlichung wird u. A. gezeigt, wie zweidimensionale konforme Feldtheorien konstruiert werden können, die vollständig lösbar sind. Diese wurden seitdem mit zahlreichen statistischen Systemen am kritischen Punkt identifiziert und als minimale Modelle bezeichnet.

Die endlich erzeugte Gruppe der konformen Transformationen in $d > 2$ Dimensionen erlaubt nicht viel mehr Rückschlüsse auf die Gestalt der Korrelationsfunktionen als die Skaleninvarianz allein. In dem zweidimensionalen Fall dagegen definiert jede in einer Umgebung holomorphe Abbildung eine lokale konforme Transformation, so dass die Algebra der konformen Gruppe unendlichdimensional wird. Die damit verbundene Vielzahl an Symmetrien begründet die bemerkenswerte Reichweite der zweidimensionalen konformen Feldtheorie bei der Beschreibung von kritischen Phänomenen in zweidimensionalen statistischen Systemen.

Von besonderem Interesse sind zweidimensionale konforme Feldtheorien, die nicht auf der Ebene (genauer: auf der Riemannschen Sphäre), sondern auf einer Riemannschen Fläche höheren Geschlechts formuliert sind. Dies ist nichts Außergewöhnliches in Anwendungen auf die String-Theorie [32, 21, 28], etwa die Berechnung von Multiloop-Amplituden bei der Beschreibung von wechselwirkenden Strings. Aber auch in Euklidischen Feldtheorien im Kontext der kritischen Phänomene spielt der einfachste nichtsphärische Fall, eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = 1$, der Torus, eine wichtige Rolle [7, 23]. So werden bei der Untersuchung von experimentell relevanten Prozessen meistens Systeme in einem Raum endlichen Volumens betrachtet (etwa Phasenübergang auf einer rechteckigen Oberfläche endlicher Ausdehnung). Um die endliche Ausdehnung zu berücksichtigen, werden die zu beschreibenden Systeme periodischen Randbedingungen unterworfen, die formal zu der Torus-Topologie führen. Außerdem hat die Forderung nach Konsistenz der Formulierung der Theorie auf dem Torus wichtige Konsequenzen für die Struktur der Theorie auf der Ebene zur Folge: Aus der modularen Invarianz der Zustandssumme auf dem Torus können Einschränkungen für den Operatorgehalt der Theorie auf der Ebene gefolgert werden, welche eine Klassifizierung der minimalen Modelle erlauben.

Im Gegensatz zur Riemannschen Sphäre stellt sich die Berechnung der Korrelationsfunktionen auf dem Torus als eine komplizierte Aufgabe heraus. Auf Grund dessen stellt man sich die Frage, ob sich Torus-Korrelationsfunktionen durch Vergleich mit Korrelationsfunktionen auf der Ebene berechnen lassen. In [26] wird von V. G. Knizhnik gezeigt, dass eine kompakte Riemannsche Fläche höheren Geschlechts stets als n-fache verzweigte Überlagerung der Riemannschen Sphäre dargestellt werden kann. Dabei werden die entsprechenden Verzweigungspunkte durch geeignete sogenannte Vertex-Operatoren simuliert. Dies hat zur Folge, dass Korrelationsfunktionen auf einer Riemannschen Fläche höheren Geschlechts durch Korrelationsfunktionen auf der Riemannschen Sphäre mit eingesetzten speziellen Vertex-Operatoren ausgedrückt werden können. Diese Idee von Knizhnik wird in [14] aufgegriffen und am Beispiel der konformen Feldtheorie mit der zentralen Ladung $c = -2$ diskutiert. Es wird gezeigt, dass sich Vierpunkt-Korrelationsfunktionen auf der Ebene mit mindestens einem auf dem zweiten Level entarteten Feld durch Nullpunktfunktionen auf dem Torus ausdrücken lassen. Der in diesem Falle verzeichnete Erfolg (insbesondere die Einfachheit der Ausdrücke betreffend) ist primär auf die Tatsache zurückzuführen, dass es die primären Felder der Theorie sind, die eine unmittelbare geometrische Interpretation zulassen: Sie simulieren Verzweigungspunkte oder Pole in der komplexen Ebene und erzeugen somit eine verzweigte Überlagerung der Riemannschen Sphäre, die gerade einem Torus entspricht. Dies muss in anderen konformen Feldtheorien nicht zwangsläufig der Fall sein. Letzteres hat zur Folge, dass die den Zusammenhang – im Falle seiner Existenz – beschreibenden Ausdrücke eine kompliziertere Gestalt annehmen können.

Den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit liegt die Behauptung zugrunde, dass sich die in [14] vorgestellten Ergebnisse auch in minimalen Modellen erzielen lassen. Die dabei untersuchten Theorien sind: das Ising-Modell, das Lee-Yang-Modell, das trikritische Ising-Modell sowie das Dreizustand-Potts-Modell. In jedem der genannten Modelle wird nach einer Beziehung zwischen Vierpunkt-Korrelationsfunktionen auf der Ebene mit mindestens einem auf Level 2 entarteten Feld und Linearkombinationen von Torus-Nullpunktfunktionen gesucht.

In Kapiel 2 dieser Arbeit werden einige für die Untersuchung der Vierpunktfunktionen wichtige theoretische Grundlagen erarbeitet.

In dem darauffolgenden Kapitel werden Ergebnisse der Untersuchung von oben genannten minimalen Modellen vorgestellt.

2 Grundlagen der zweidimensionalen konformen Feldtheorie

Der folgende Abschnitt ist den Grundlagen der zweidimensionalen konformen Feldtheorie gewidmet. Zu Beginn wird der Begriff der konformen Invarianz und der Gruppe der Symmetrietransformationen diskutiert. Anschließend wird sowohl auf die Struktur als auch auf die Darstellungstheorie der Algebra dieser Symmetriegruppe eingegangen. In den Unterkapiteln 2. 5 und 2. 6 werden zum einen die minimalen Modelle eingeführt, die im Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen stehen werden, zum anderen wird der Zusammenhang der vorigen Ergebnisse mit Korrelationsfunktionen besprochen. Es werden speziell Vierpunktfunktionen auf der Ebene betrachtet, und es wird gezeigt, wie und unter welchen Voraussetzungen sich diese als Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung bestimmen lassen. Abschließend wird auf konforme Theorie auf dem Torus und einige Konsequenzen der modularen Invarianz eingegangen.

2.1 Radiale Quantisierung

Im Rahmen des Operatorformalismus der zweidimensionalen konformen Feldtheorie muss zwischen der Raum- und der Zeitrichtung unterschieden werden. Die Wahl dieser speziellen Richtungen führt zu der sogenannten *radialen Quantisierung*. Man geht von Minkowski-Koordinaten mit kompaktifizierter Raumrichtung aus, $(x^0, x^1) \sim (x^0, x^1 + 2\pi)$. Die Koordinatenfläche kann also als die Oberfläche eines Zylinders angesehen werden. Nach der Wick-Rotation $(x^0, x^1) \mapsto (x^1, ix^0) = (x^1, x^2)$ erhält man die Euklidischen Koordinaten (x^1, x^2) auf dem Zylinder. Man führe nun die komplexe Veränderliche $z = x^1 - ix^2$ ein und betrachte die Abbildung

$$z \mapsto e^{iz} = e^{x^2 + ix_1}$$

Diese bildet den Zylinder gerade auf die Riemannsche Sphäre $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ab, sodass $(x^1, -\infty) \mapsto 0$, $(x^1, \infty) \mapsto \infty$, und die konzentrischen Kreise um den Ursprung der komplexen Ebene sind dann Linien gleicher Zeit [31].

Zweidimensionale Theorien werden üblicherweise in den als unabhängig anzusehenden Variablen $z, \bar{z} = x^1 \mp ix^2$ formuliert. Man beachte, dass $\bar{z}$ dabei nicht die zu z konjugiert komplexe Zahl $z*$ ist, sondern eine unabhängige komplexe Veränderliche. Der physikalische Raum ist die zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, gegeben durch $\bar{z} = z*$ [17].

Radialordnung

Wird eine Feldtheorie auf dem Zylinder in Minkowski-Koordinaten formuliert, so werden Produkte von Operatoren zeitgeordnet, damit man für ihre Erwarungswerte (insb. Greensche Funktionen) sinnvolle Ergebnisse erhält (anderenfalls könnte der Ausdruck nach einer Wick-Rotation in Euklidische Koordinaten unbeschränkt wachsen). Geht man zu der Formulierung auf der Ebene über, so wird die Zeitkoordinate auf die radiale Koordinate abgebildet, und es ergibt sich mit denselben Argumenten die *Radialordnung* [31]:

$$R(A(z,\bar{z})B(w,\bar{w})) = \begin{cases} A(z,\bar{z})B(w,\bar{w}), & \text{für } |z| > |w| \\ B(w,\bar{w})A(z,\bar{z}), & \text{für } |w| > |z| \end{cases}$$

2.2 Lokale und globale konforme Symmetrie

Eine infinitesimale Transformation

$$z \mapsto z + \epsilon, \qquad \bar{z} \mapsto \bar{z} + \bar{\epsilon}$$

ist genau dann *konform*, wenn

$$\partial_{\bar{z}}\epsilon = 0 \qquad \textit{und} \qquad \partial_z \bar{\epsilon} = 0$$

gilt, d.h. wenn ϵ eine beliebige Funktion von z (unabhängig von $\bar{z}$) und $\bar{\epsilon}$ eine beliebige Funktion (nur) von $\bar{z}$ ist:

$$\epsilon = \epsilon(z), \qquad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\bar{z}) \ .$$

Die zweidimensionalen konformen Transformationen stimmen somit mit analytischen Koordinatentransformationen

$$z \mapsto f(z), \qquad \bar{z} \mapsto \bar{f}(\bar{z})$$

überein, deren lokale Algebra unendlichdimensional ist [19]. Die obige Definition einer konformen Transformation ist *lokal*, da nicht gefordert wird, dass diese überall wohldefiniert und umkehrbar ist. Diejenigen lokalen Transformationen, die die genannten zusätzlichen Eigenschaften haben, werden als *global* bezeichnet; sie bilden eine Untergruppe, die man als *spezielle konforme Gruppe* bezeichnet. Es handelt sich um die infinitesimalen Transformationen

$$z \mapsto z + \epsilon, \qquad z \mapsto z + \epsilon z, \qquad z \mapsto z + \epsilon z^2 \ .$$

Die endliche Form dieser Transformationen ist

$$z \mapsto z + \alpha, \qquad z \mapsto \lambda z, \qquad z \mapsto \frac{z}{1 - \beta z} \ .$$

Die ersten beiden Abbildungen beschreiben Translationen, Rotationen und Skalentransformationen. Die letzte ist als *spezielle konforme Transformation* bekannt. Alle drei kombiniert ergeben die allgemeine Gestalt der globalen konformen Transformationen:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \qquad ad - bc = 1 \ . \tag{1}$$

Diese Transformationen können mit den Elementen der Gruppe $SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ identifiziert werden [17, 31].

Primäre Felder

Ein Feld Φ heißt *primär vom konformen Gewicht* $(h, \bar{h})$, falls es sich unter einer analytischen Koordinatentransformation $z \mapsto f(z)$, $\bar{z} \mapsto \bar{f}(\bar{z})$ wie folgt verhält:

$$\Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \Phi(z, \bar{z}) \ . \tag{2}$$

Die infinitesimale Form dieser Transformation lautet

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}} \Phi(z, \bar{z}) &= \Phi'(z, \bar{z}) - \Phi(z, \bar{z}) \\ &= (h\partial_z \epsilon(z)\Phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z)\partial_z \Phi(z, \bar{z})) + \left(\bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon}(\bar{z})\Phi(z, \bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}}\Phi(z, \bar{z})\right) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Felder, die die Tranformationseigenschaft (2) bzw. (3) nur bezüglich der globalen Untergruppe $SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ zeigen, werden als *quasi-primär* bezeichnet [17].
Aus (2) ist ersichtlich, dass die Transformation bezüglich der Variable z unabhängig von $\bar{z}$ ist und umgekehrt. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit oft der Einfachheit halber nur die z-Abhängigkeit berücksichtigt. Auf Grund der genannten Entkopplung zwischen dem holomorphen und dem antiholomorphen Freiheitsgrad können die Ausdrücke immer leicht vervollständigt werden.

2.3 Die Virasoro-Algebra

An dieser Stelle wird kurz auf die Struktur der Algebra der lokalen konformen Transformationen eingeganden.

Modenentwicklung

Einem quasi-primären Feld Φ vom Gewicht $(h, \bar{h})$ kann die Modenentwicklung

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{m,n} z^{-m-h} \bar{z}^{-n-\bar{h}} \Phi_{m,n} \tag{4}$$

mit

$$\Phi^{\dagger}_{m,n} = \Phi_{-m,-n}$$

zugeordnet werden. Dies kann formal als eine Laurant-Reihenentwicklung angesehen und entsprechend umgekehrt werden [17]:

$$\Phi_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dz\, z^{m+h-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_0 d\bar{z}\, \bar{z}^{n+\bar{h}-1} \Phi(z, \bar{z}) \ . \tag{5}$$

Konforme Generatoren

In den komplexen Koordinaten z, $\bar{z}$ ist der Erhaltungssatz $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ äquivalent zum Gleichungssystem[1]

$$\begin{aligned} &\partial_{\bar{z}} T_{zz} + \partial_z T_{\bar{z}z} = 0 \\ \wedge \quad &\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} T_{z\bar{z}} = 0 \ . \end{aligned}$$

Da der Energie-Impuls-Tensor spurfrei ist, $T^\mu{}_\mu = 0$, ist

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \ ,$$

und es folgt insgesamt

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0, \qquad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \ .$$

Die zwei nichtverschwindenden Komponenten von T sind somit rein holomorph bzw. rein anti-holomorph. Man setzt daher

$$T(z) = T_{zz}(z), \qquad \bar{T}(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) \ .$$

Der Generator einer infinitesimalen konformen Transformation $(z, \bar{z}) \mapsto (z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}))$ kann wie folgt definiert werden:

$$Q_{\epsilon,\bar{\epsilon}} = Q_\epsilon + Q_{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2\pi i} \oint \big(dz\, \epsilon(z) T(z) + d\bar{z}\, \bar{\epsilon}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}) \big) \ . \tag{6}$$

Somit ergibt sich für ein Feld $\Phi(z)$:

$$\delta_\epsilon \Phi(z) = \big[Q_\epsilon, \Phi(z) \big] \ . \tag{7}$$

Der Energie-Impuls-Tensor besitzt die Modenentwicklung

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_n z^{-n-2} L_n, \qquad & L_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, z^{n+1} T(z) \ ; \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \sum_n \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n, \qquad & \bar{L}_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z}\, \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Mit

$$\epsilon(z) = \sum_n z^{n+1} \epsilon_n, \qquad \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \sum_n \bar{z}^{n+1} \bar{\epsilon}_n$$

1 In den genannten Koordinaten hat der metrische Tensor die Gestalt $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}$

folgt für den Generator

$$Q_\epsilon = \sum_n \epsilon_n L_n, \qquad Q_{\bar\epsilon} = \sum_n \bar\epsilon_n \bar L_n \ .$$

Somit erzeugen die Operatoren L_n, $\bar L_n$ konforme Transformationen auf dem Hilbert-Raum der Zustände; sie erfüllen die *Virasoro-Algebra*

$$\begin{aligned}
\left[L_n, L_m\right] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \ , \\
\left[\bar L_n, \bar L_m\right] &= (n-m)\bar L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \ , \\
\left[L_n, \bar L_m\right] &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{9}$$

Die Konstante c wird als *zentrale Ladung* der Theorie bezeichnet. Jede konform invariante Quantenfeldtheorie bestimmt eine Darstellung der Algebra (9) mit einem bestimmten Wert von c [17, 19].

Die Untergruppe $SL_2(\mathbb{C})$ der global definierten konformen Transformationen wird erzeugt von $\{L_{-1}, L_0, L_1\} \cup \{\bar L_{-1}, \bar L_0, \bar L_1\}$. So generiert beispielsweise $L_0 + \bar L_0$ die Skalentransformationen $(z,\bar z) \mapsto \lambda(z,\bar z)$, die in radialer Quantisierung gerade die Zeittranslationen sind. Somit ist $L_0 + \bar L_0$ proportional zum Hamiltonian des Systems.

Bei der Berechnung des Kommutators (7) geht man wie folgt vor:

$$\begin{aligned}
\left[Q_\epsilon, \Phi(w,\bar w)\right] &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|>|w|} dz\, \epsilon(z) T(z) \Phi(w,\bar w) - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|<|w|} dz\, \epsilon(z) \Phi(w,\bar w) T(z) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint\limits_{|z|>|w|} - \oint\limits_{|z|<|w|} \right] dz\, \epsilon(z) R\left(T(z)\Phi(w,\bar w)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{w} dz\, \epsilon(z) R\left(T(z)\Phi(w,\bar w)\right) \ ,
\end{aligned} \tag{10}$$

wobei in der letzten Zeile entlang einer Kreislinie um w integriert wird. Das Integral ist nur wohldefiniert, wenn das radialgeordnete Operatorprodukt in einer Umgebung von w analytisch ist. Also können wir das Produkt auf einem Kreisring um w in eine Laurent-Reihe entwickeln:

$$R\left(T(z)\Phi(w,\bar w)\right) = \sum_n (z-w)^n O_n(w,\bar w) \ .$$

Aus den Gleichungen (3), (7) und (10) ergibt sich mit der Cauchy-Formel $O_{-2} = h\Phi(w, \bar{w})$, $O_{-1} = \partial_w \Phi(w, \bar{w})$, $O_n = 0$ für $n < 2$ und somit insgesamt

$$\begin{aligned} R\left(T(z)\Phi(w,\bar{w})\right) &= \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w \Phi(w,\bar{w}) + \sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^n O_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^{n-2}\widehat{L}_{-n}\Phi(w,\bar{w}) \ . \end{aligned} \tag{11}$$

Diese Operatorproduktentwicklung spiegelt eindeutig das Transformationsverhalten von Φ unter der Gruppe der lokalen konformen Transformationen wider und kann alternativ als Definition eines primären Feldes verwendet werden. Felder, die in ihrer Operatorproduktentwicklung mit dem Energie-Impuls-Tensor Singularitäten höherer Ordnung aufweisen, heißen *sekundäre Felder* [31].

Die Felder $\widehat{L}_{-n}\Phi$ werden als die vom primären Feld Φ *abgeleiteten Felder* bezeichnet, sie haben die Gestalt

$$\widehat{L}_{-n}\Phi(w,\bar{w}) = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, \frac{1}{(z-w)^{n-1}}T(z)\Phi(w,\bar{w}) \ . \tag{12}$$

Aus (10) und (11) erhält man mit Cauchy-Formel

$$\begin{aligned} \left[L_n, \phi(w,\bar{w})\right] &= \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^{n+1}\left(\frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{\partial\phi(w,\bar{w})}{z-w}\right) \\ &= h(n+1)w^n\phi(w,\bar{w}) + w^{n+1}\partial\phi(w,\bar{w}) \end{aligned} \tag{13}$$

und analog

$$\begin{aligned} \left[\bar{L}_n, \phi(w,\bar{w})\right] &= \frac{1}{2\pi i}\oint d\bar{z}\, \bar{z}^{n+1}\left(\frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{\bar{\partial}\phi(w,\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}}\right) \\ &= \bar{h}(n+1)\bar{w}^n\phi(w,\bar{w}) + \bar{w}^{n+1}\bar{\partial}\phi(w,\bar{w}) \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Es gilt insbesondere

$$\left[L_n, \phi(0,0)\right] = \left[\bar{L}_n, \phi(0,0)\right] = 0 \quad \forall n > 0 \tag{15}$$

und

$$\left[L_0, \phi(0,0)\right] = h\phi(0,0), \quad \left[\bar{L}_0, \phi(0,0)\right] = \bar{h}\phi(0,0) \ . \tag{16}$$

2.4 Höchstgewichtsdarstellung und abgeleitete Zustände

Der Hilbert-Raum der Zustände wird ausgehend vom Vakuumzustand $|0\rangle$ aufgebaut. Aus der Forderung, dass

$$T(z)|0\rangle = \sum_n z^{-n-2} L_n|0\rangle$$

(sowie die antiholomorphe Komponente) regulär bei $z = 0$ ist, ergibt sich

$$L_n|0\rangle = \bar{L}_n|0\rangle = 0 \quad \text{für } n \geq -1 \ .$$

Man betrachte ein konformes Feld $\phi(z)$ vom Gewicht $(h, 0)$. Fordert man auch hier die Analytizität von

$$\phi(z)|0\rangle = \sum_n z^{-n-h} \phi_n|0\rangle$$

in $z = 0$, so folgt

$$\phi_n = 0 \qquad \forall n \geq -h + 1 \ .$$

Aus (13) erhält man

$$\begin{aligned}
\left[L_n, \phi_m\right] &= \frac{1}{2\pi i} \oint dw\, w^{h+m-1} \left(h(n+1) w^n \phi(w) + w^{n+1} \partial\phi(w)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint dw\, \left(h(n+1) w^{h+m+n-1} \phi(w) + \partial(w^{h+m+n}\phi(w))\right) \\
&\quad - \oint dw\, \left((h+m+n) w^{h+m+n-1} \phi(w)\right) \\
&= (n(h-1) - m)\, \frac{1}{2\pi i} \oint dw\, w^{(n+m)+h-1} \phi(w) \\
&= (n(h-1) - m)\, \phi_{n+m} \ .
\end{aligned} \tag{17}$$

Hieraus folgt, dass der Zustand $|h\rangle = \phi(0)|0\rangle = \phi_{-h}|0\rangle$ ein Eigenzustand von L_0 ist:

$$L_0|h\rangle = L_0 \phi_{-h}|0\rangle = h|h\rangle \ .$$

Diese Beobachtung lässt sich verallgemeinern: Der vom konformen Feld $\phi(z, \bar{z})$ vom Gewicht $(h, \bar{h})$ erzeugte Zustand

$$|h, \bar{h}\rangle = \phi(0, 0)|0\rangle$$

hat nach (15), (16) die Eigenschaft

$$\begin{aligned}
L_0|h, \bar{h}\rangle &= h|h, \bar{h}\rangle, \quad \bar{L}_0|h, \bar{h}\rangle = \bar{h}|h, \bar{h}\rangle \ , \\
L_n|h, \bar{h}\rangle &= \bar{L}_n|h, \bar{h}\rangle = 0 \quad \forall n > 0
\end{aligned} \tag{18}$$

und wird als *Höchstgewichtszustand* bezeichnet. Höchstgewichtszustände sind daher Eigenzustände des Hamiltonian $L_0 + \bar{L}_0$.
Aus (17) und (9) folgt

$$\begin{aligned} \left[L_0, \phi_m\right] &= -m\phi_m \ , \\ \left[L_0, L_m\right] &= -mL_m \ . \end{aligned}$$

Die Operatoren L_m, ϕ_m erniedrigen bzw. erhöhen somit das konforme Gewicht eines Eigenzustandes von L_0, fungieren also als Leiteroperatoren auf dem Hilbert-Raum. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} L_0 L_{-m}|h\rangle &= (h+m)L_{-m}|h\rangle \ , \\ L_0 \phi_{-m}|h\rangle &= (h+m)\phi_{-m}|h\rangle \ . \end{aligned}$$

Die zu dem Höchstgewichtszustand $|h\rangle$ gehörigen angeregten Zustände haben die Gestalt

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\dots L_{-n_k}|h\rangle, \quad 1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$$

und werden als *abgeleitete Zustände* bezeichnet. Die Zahl $N = \sum_i n_i$ nennt man den *Level* des Zustands. Der Zustand $|h\rangle$ und seine abgeleiteten Zustände sind abgeschlossen unter konformen Transformationen und bilden somit eine Darstellung der Virasoro-Algebra, die man als den *Verma-Modul* $V(c,h)$ von $|h\rangle$ bezeichnet. Jedes Element der Darstellung kann aus dem Vakuum $|0\rangle$ mit den abgeleiteten Feldern erzeugt werden [19, 17]:

$$L_{-n}|h\rangle = L_{-n}\phi(0)|0\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, \frac{1}{(z-w)^{n-1}}T(z)\phi(0)|0\rangle = \left(\widehat{L}_{-n}\phi\right)(0)|0\rangle \ .$$

Bezeichnet man mit $\bar{V}(c,\bar{h})$ den Verma-Modul der aus $|\bar{h}\rangle$ mit $\bar{L}_n$ erzeugten abgeleiteten Zustände, so ist der Hilbert-Raum gegeben durch

$$\bigoplus_{h,\bar{h}} V(c,h) \otimes \bar{V}(c,\bar{h}) \ .$$

Virasoro-Charaktere

Einem Verma-Modul $V(c,h)$ ordnet man die Funktion

$$\chi_{(c,h)}(\tau) = \mathrm{Tr}\, q^{L_0 - c/24}, \quad q = e^{2\pi i\tau}, \quad \tau \in \mathbb{C} \tag{19}$$

zu, die man als den *Virasoro-Charakter* des Moduls bezeichnet. Charaktere geben Auskunft über den Entartungsgrad eines Levels im Modul. Dies erkennt man auch an der Darstellung

$$\chi_{(c,h)}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(h+n) q^{h+n-c/24}$$

wobei $\dim(h+n)$ die Anzahl der unabhängigen Zustände auf dem n-ten Level des Moduls bezeichnet. Eine weitere Darstellung der Charaktere lautet

$$\chi_{(c,h)} = \frac{q^{h+(1-c)/24}}{\eta(\tau)} \ . \tag{20}$$

Hierbei ist $\eta(\tau)$ die Dedekindsche η-Funktion:

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) \ . \tag{21}$$

Nullzustände und reduzible Moduln

Ein Zustand $|\chi\rangle \in V(c,h)$ heißt Nullzustand, falls $|\chi\rangle \neq |h\rangle$ und $L_n|\chi\rangle = 0 \ \forall n > 0$. Ein solcher Zustand hat offenbar die Eigenschaft

$$\langle\chi|\chi\rangle = \langle\chi|L_{-n_1} \dots L_{-n_k}|h\rangle = 0 \ .$$

Die Nullzustände werden unter beliebigen konformen Transformationen wieder auf Nullzustände abgebildet und erzeugen daher ein eigenes Verma-Modul $V_\chi \subset V(c,h)$. Somit ist $V(c,h)$ *reduzibel*, falls es mindestens einen Nullzustand enthält. Man erhält eine *irreduzible* Darstellung der Virasoro-Algebra, indem man Zustände, die sich um einen Nullzustand unterscheiden, miteinander identifiziert: Es seien $|\psi_1\rangle, \ |\psi_2\rangle \in V(c,h)$ keine Nullzustände. Nun betrachte man die Äquivalenzrelation

$$|\psi_1\rangle \sim |\psi_2\rangle :\Leftrightarrow |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle + |\chi\rangle \quad \text{für einen Nullzustand } |\chi\rangle \in V(c,h) \ .$$

Dann ist die Darstellung

$$M(c,h) = \frac{V(c,h)}{\sim} \tag{22}$$

irreduzibel [17].

Die Tatsache, dass bei der Darstellung der Algebra $|\chi\rangle \equiv 0$ gesetzt wird, hat bedeutende Auswirkungen auf Korrelationsfunktionen, wie man im Folgenden noch sehen wird (vgl. Unterkapitel 2. 6).

2.5 Minimale Modelle

Von besonderem Interesse sind Theorien, die aus einer endlichen Zahl von Verma-Moduln bestehen und somit prinzipiell vollständige Lösbarkeit, d. h. die Bestimmung aller Korrelationsfunktionen, erlauben. Sie werden als *minimale Theorien* oder *minimale Modelle* bezeichnet. Minimale Modelle beschreiben diskrete statistische Modelle (wie z. B. Ising, Yang-Lee etc.) am kritischen Punkt.
Um minimale Modelle zu klassifizieren, wird die Gramsche Matrix der Zustände aus $V(c,h)$ untersucht. Sind $\{|i\rangle\}$ die Zustände auf dem l-ten Level von $V(c,h)$, so ergibt sich die Matrix zu

$$M_{ij}^{(l)} = \langle i|j\rangle \ .$$

Die Determinante dieser Matrix heißt *Kac-Determinante*. Ihre allgemeine Gestalt ist

$$\det M^{(l)} = \alpha_l \prod_{\substack{r,s\geq 1,\\ rs\leq l}} [h - h_{r,s}(c)]^{P(l-rs)} \ , \tag{23}$$

wobei $\alpha_l > 0$ und $P(l-rs)$ die Anzahl der Zerlegungen der natürlichen Zahl $l-rs$ ist. Es kann gezeigt werden[2], dass eine Theorie genau dann minimal ist − besitzt also nur endlich viele primäre Felder −, wenn

$$\begin{aligned} c &= 1 - 6\frac{(p-p')^2}{pp'} \ , \\ h_{r,s} &= \frac{(pr-p's)^2-(p-p')^2}{4pp'} \ , \end{aligned} \tag{24}$$

$$1 \leq r < p',\ 1 \leq s < p, \quad p,p' \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \ .$$

Man beachte die Symmetrie $h_{r,s} = h_{p'-r,p-s}$.
Ein minimales Modell wird als *unitär* bezeichnet, falls es keine Zustände negativer Norm besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Kac-Determinante nichtnegativ ist. Letzteres ist äquivalent zu den Bedingungen[3], dass $(c \geq 1,\ h \geq 0)$ *oder*

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \qquad m = 3,4,\ldots \ , \\ h_{r,s} &= \frac{[(m+1)r-ms]^2-1}{4m(m+1)}, \qquad 1 \leq r \leq m-1, \quad 1 \leq ns \leq r \ . \end{aligned} \tag{25}$$

2 siehe etwa [17]
3 Beweise finden sich in [18, 20]

Im Folgenden wird das zum Paar (p, p') gehörige minimale Modell mit $\mathcal{M}(p, p')$ bezeichnet. Die Kac-Determinante verschwindet genau dann, wenn der Modul $V(c, h)$ auf dem entsprechenden Level einen Nullzustand besitzt. Anders ausgedrückt, die Darstellung ist genau dann reduzibel, wenn h durch (24) gegeben ist. Wie schon in Unterkapitel 2. 4 erwähnt wurde, gewinnt man aus dem reduziblen Modul $V_{r,s} = V(c(p, p'), h_{r,s}(p, p'))$ eine irreduzible Darstellung durch Identifikation der Zustände modulo Nullvektor. Am einfachsten lässt sich diese Darstellung durch ihre Charaktere, die sogenannten *minimalen Charaktere*, beschreiben [17]. Diese lauten

$$\chi_{p,p',r,s}(q) = \frac{\theta_{pr-p's,pp'}(q) - \theta_{pr+p's,pp'}(q)}{\eta(q)} \ , \tag{26}$$

wobei $\theta_{\lambda,k}$ die Jacobi-Riemannschen Theta-Funktionen sind:

$$\theta_{\lambda,k}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(2kn+\lambda)^2/4k} \ . \tag{27}$$

Diese Charaktere sind im dritten Abschnitt der Arbeit von zentraler Bedeutung.
Auf dem zweiten Level vereinfacht sich die Situation zu

$$\begin{aligned} \det M^{(2)} &= 32(h - h_{1,1})(h - h_{1,2})(h - h_{2,1}) \ , \\[2ex] h_{1,1} &= 0 \ , \\ h_{1,2} &= \frac{1}{16}\left(5 - c - \sqrt{(1-c)(25-c)}\right) \ , \\ h_{2,1} &= \frac{1}{16}\left(5 - c + \sqrt{(1-c)(25-c)}\right) \ . \end{aligned} \tag{28}$$

2.6 Korrelationsfunktionen

In diesem Kapitel werden Konsequenzen, die sich aus dem Transformationsverhalten der Felder sowie aus der Existenz von Nullzuständen für Korrelationsfunktionen ergeben, diskutiert.

2.6.1 Konforme Invarianz und Korrelationsfunktionen

Auswirkungen der globalen Symmetrie

Es seien ϕ_i konforme Felder der Dimensionen $(h_i, \bar{h}_i)$. Ist $f : z \mapsto w$ eine konforme Transformation, so ergibt sich für eine n-Punkt-Korrelationsfunktion

$$\langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \ldots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-h_j}_{z=z_j} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{-\bar{h}_j}_{\bar{z}=\bar{z}_j} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \ldots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \ . \tag{29}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung können die Zwei- und Dreipunktfunktionen vollständig festgelegt werden. Benutzt man nämlich (29) sukzessiv für Skalentransformationen, Rotationen und Translationen und schließlich für spezielle konforme Transformationen, so können die genannten Funktionen auf die folgende Form gebracht werden:

$$\langle \phi_i(z_1,\bar{z}_1)\phi_j(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \frac{\delta_{ij}}{(z_1-z_2)^{h_1+h_2}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}} \ , \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_i(z_1,\bar{z}_1)\phi_j(z_2,\bar{z}_2)\phi_k(z_3,\bar{z}_3)\rangle = C_{ijk} & \frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{31}^{h_3+h_1-h_2}} \\ \times & \frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3} \bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1} \bar{z}_{31}^{\bar{h}_3+\bar{h}_1-\bar{h}_2}} \ , \end{aligned} \tag{31}$$

wobei $z_{ij} = z_i - z_j$ gesetzt wurde[4].
Für $n \geq 4$ können die n-Punktfunktionen jedoch nicht mehr durch Ausnutzung der globalen konformen Invarianz vollständig festgelegt werden. Dies liegt an der Existenz von konformen Invarianten, die man als *harmonische Verhältnisse* bezeichnet. Das sind Ausdrücke der Form

$$x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \ ,$$

die invariant unter der Wirkung von $SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ sind. Eine Vierpunktfunktion kann daher nur auf die Form

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle = F(x,\bar{x}) \prod_{1\leq i<j\leq 4} z_{ij}^{h/3-h_i-h_j} \bar{z}_{ij}^{\bar{h}/3-\bar{h}_i-\bar{h}_j} \tag{32}$$

gebracht werden, wobei $h = \sum_{i=1}^4 h_i$, $\bar{h} = \sum_{i=1}^4 \bar{h}_i$. Diese Gestalt der Vierpunktfunktion kann man sich folgermaßen plausibel machen. Es existiert immer eine globale konforme Transformation (1), die drei der vier Argumente der Funktion auf drei feste Punkte abbildet, etwa $z_1 \mapsto \infty$, $z_2 \mapsto 1$ und $z_4 \mapsto 0$. Dann folgt für das harmonische Verhältnis $x \mapsto z_3$, und die Funktion (32) ist von diesem einen Punkt abhängig [19, 17].

Auswirkungen der lokalen Symmetrie

Es ist möglich, zusätzliche Informationen aus der lokalen konformen Algebra zu gewinnen. Man betrachte eine n-Punktfunktion von Operatoren ϕ_i in den Punkten w_i sowie eine konforme Transformation $Q_\epsilon = \oint dz\, \epsilon(z)T(z)$, wobei als Integrationskurve eine Kreislinie um den Ursprung gewählt wird, deren Radius so groß ist, dass alle Punkte w_i in der beschränkten

4 Eine detaillierte Herleitung findet sich etwa in [31]

Zusammenhangskomponente liegen. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\left\langle \oint dz\, \epsilon(z) T(z) \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \ldots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \ldots \left(\oint_{w_j} dz\, \epsilon(z) T(z) \phi_j(w_j, \bar{w}_j) \right) \ldots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \; .
\end{aligned}$$

Da ϵ beliebig gewählt wurde, erhält man mit (11)

$$\begin{aligned}
&\langle T(z) \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \ldots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{h_j}{(z - w_j)^2} + \frac{1}{z - w} \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \ldots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle \; .
\end{aligned} \tag{33}$$

Die letzte Gleichung ist als *konforme Ward-Identität* bekannt [19].

Korrelationsfunktionen mit abgeleiteten Feldern

Es sei ϕ_1 primär und $\widehat{L}_{-k}\phi_1$, $k \geq 1$, sein k-tes abgeleitetes Feld. Dann folgt mit (12) und (33)

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{L}_{-k}\phi_1(w_1)\phi_2(w_2) \ldots \phi_n(w_n) \rangle &= \oint_{w_1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z - w_1)^{k-1}} \langle T(z) \phi_1(w_1) \phi_2(w_2) \ldots \phi_n(w_n) \rangle \\
&= \oint_{w_1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z - w_1)^{k-1}} \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{h_j}{(z - w_j)^2} + \frac{1}{z - w_j} \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \langle \phi_1(w_1) \ldots \phi_n(w_n) \rangle \\
&= - \oint_{w_j} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z - w_1)^{k-1}} \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{h_j}{(z - w_j)^2} + \frac{1}{z - w_j} \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \langle \phi_1(w_1) \ldots \phi_n(w_n) \rangle \; .
\end{aligned} \tag{34}$$

Die Summation beginnt mit $j = 2$, da das Integral für $j = 1$ nach der Cauchy-Formel verschwindet. Die dritte Zeile folgt aus der Tatsache, dass das Residuum des Integranden in $z = \infty$ gleich Null ist[5]. Das letzte Integral kann ebenfalls mit der Cauchy-Formel berechnet werden, und man erhält [17, 31]

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{L}_{-k}\phi_1(w_1)\phi_2(w_2) \ldots \phi_n(w_n) \rangle &= \mathcal{L}_{-k} \langle \phi_1(w_1) \ldots \phi_n(w_n) \rangle, \\
\mathcal{L}_{-k} &= \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{(k-1)h_j}{(w_1 - w_j)^k} - \frac{1}{(w_1 - w_j)^{k-1}} \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \; .
\end{aligned} \tag{35}$$

5 $\operatorname{res} f(\infty) = -\operatorname{res} g(0)$, wobei $g(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$

Man sieht, dass sich lokale konforme Invarianz der Felder in zusätzlichen Einschränkungen für die Korrelationsfunktionen offenbart. Insbesondere sind Korrelationsfunktionen mit sekundären Feldern bestimmt durch Wirkung von Differentialoperatoren auf Korrelationsfunktionen primärer Felder.

2.6.2 Nullzustände und Korrelationsfunktionen

Die Existenz von Nullzuständen im Verma-Modul hat wichtige Konsequenzen für Korrelationsfunktionen. In dieser Arbeit werden nur Nullzustände auf dem zweiten Level untersucht. Man betrachte $V(c,h)$ mit $h \in \{h_{1,2}, h_{2,1}\}$ (vgl. (28)). Ferner sei $L_{-1}|h\rangle \neq 0$ (anderenfalls würde $h = 0 \Rightarrow |h\rangle = |0\rangle$ folgen). Es wird nun eine Linearkombination von $L_{-2}|h\rangle$, $L_{-1}^2|h\rangle$ gesucht, die einen Nullzustand ergibt:

$$L_{-2}|h\rangle + aL_{-1}^2|h\rangle = 0 \ .$$

Hieraus folgt

$$\big[L_1, L_{-2}\big]|h\rangle + a\big[L_1, L_{-1}^2\big]|h\rangle = 0 = (3 + 2a(2h+1))L_{-1}|h\rangle \ ,$$

und man erhält

$$a = -\frac{3}{2(2h+1)} \ .$$

Es ist also

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)}L_{-1}^2\right)|h\rangle = 0 \tag{36}$$

bzw.

$$\left(\widehat{L}_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)}\widehat{L}_{-1}^2\right)\phi = 0 \ . \tag{37}$$

Ein primäres Feld ϕ, das (37) erfüllt, heißt *degeneriert* auf dem zweiten Level. Aus (35) folgt nun, dass Korrelationsfunktionen, in denen ein auf dem zweiten Level degeneriertes Feld vorkommt, der Differentialgleichung

$$\left(\mathcal{L}_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)}\mathcal{L}_{-1}^2\right)\langle\phi_1(w_1)\ldots\phi_n(w_n)\rangle = 0 \tag{38}$$

genügen müssen [19]. Aus (12) erhält man $\widehat{L}_{-1}^2\phi_1(w_1) = \frac{\partial^2}{\partial w_1^2}\phi_1(w_1)$, und es folgt aus (35), (38)

$$\left[a\frac{\partial^2}{\partial w_1^2} - \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{h_j}{(w_1-w_j)^2} - \frac{1}{w_1-w_j}\frac{\partial}{\partial w_j}\right)\right]\langle\phi_1(w_1)\ldots\phi_n(w_n)\rangle = 0 \ . \tag{39}$$

2.6.3 Differentialgleichung für die Vierpunktfunktion

Nach (32) kann die Vierpunktfunktion auf die Form

$$
\begin{aligned}
\langle \phi_0(z_0)\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle &= F(x) \prod_{0\leq i<j\leq 3} (z_i - z_j)^{\mu_{ij}} \\
&= (z_0-z_1)^{\mu_{01}}(z_0-z_2)^{\mu_{02}}(z_0-z_3)^{\mu_{03}}(z_1-z_2)^{\mu_{12}}(z_1-z_3)^{\mu_{13}}(z_2-z_3)^{\mu_{23}}F(x)
\end{aligned}
\tag{40}
$$

gebracht werden, wobei

$$
x = \frac{(z_0-z_1)(z_2-z_3)}{(z_0-z_3)(z_2-z_1)}, \qquad \mu_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{3} h_k - h_i - h_j \ .
$$

Man nehme an, eines der Felder, etwa ϕ_0, sei degeneriert auf dem zweiten Level. Dann kann mit Hilfe von (39) eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktion F formuliert werden. Setzt man (40) in (39) ein und fixiert die Punkte $z_1 \to 0$, $z_2 \to 1$, $z_3 \to \infty$, $(x \to z_0)$, so erhält man die Differentialgleichung[6]

$$
\begin{aligned}
\Bigg[a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[\frac{2a\mu_{01}}{x} + \frac{2a\mu_{02}}{x-1} + \frac{2x-1}{x(x-1)}\right]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a\mu_{01}(\mu_{01}-1)}{x^2} + \frac{a\mu_{02}(\mu_{02}-1)}{(x-1)^2} \\
+\frac{\mu_{01}-h_1}{x^2} + \frac{\mu_{02}-h_2}{(x-1)^2} - \frac{\mu_{12}}{x(x-1)}\Bigg] F(x) = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Nach der Substitution

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^{p+\mu_{01}}(1-x)^{q+\mu_{02}}G(x) \ , \\
p &= \frac{1}{6} - \frac{2}{3}h_0 - \mu_{01} - \frac{1}{6}\sqrt{r_1} \ , \\
q &= \frac{1}{6} - \frac{2}{3}h_0 - \mu_{01} - \frac{1}{6}\sqrt{r_2} \ , \\
r_i &= 1 - 8h_0 + 16h_0^2 + 48h_ih_0 + 24h_i
\end{aligned}
\tag{42}
$$

kann (41) auf die hypergeometrische Differentialgleichung für G zurückgeführt werden:

$$
\begin{aligned}
&\left[x(1-x)\partial_x^2 + (c-(a+b+1)x)\,\partial_x - ab\right] G(x) = 0 \ , \\
&a = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{r_1} - \frac{1}{6}\sqrt{r_2} - \frac{1}{6}\sqrt{r_3} \ , \\
&b = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{r_1} - \frac{1}{6}\sqrt{r_2} + \frac{1}{6}\sqrt{r_3} \ , \\
&c = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{r_1} \ .
\end{aligned}
\tag{43}
$$

6 Für eine ausführliche Herleitung siehe [17], S. 252ff

Im Allgemeinen besitzt (43) zwei unabhängige Lösungen um jeden der schwach singulären Punkte $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$. So erhält man z. B. um $z = 0$ für $\{c, c-a-b, a-b\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ die Lösungen[7]

$$\begin{aligned} G_0^{(1)}(x) &= {}_2F_1(a,b;c;x) \\ &= (1-x)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;x)\ , \\ G_0^{(2)}(x) &= x^{1-c}{}_2F_1(a-c+1,b-c+1;2-c;x) \\ &= x^{1-c}(1-x)^{c-a-b}{}_2F_1(1-a,1-b;2-c;x), \end{aligned} \tag{44}$$

wobei

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}, \\ (a)_n &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \end{aligned}$$

die hypergeometrische Funktion ist.
Somit kann die allgemeine Vierpunktfunktion als eine Linearkombination der sogenannten *konformen Blöcke*

$$\mathcal{F}_i(x) = x^{p+\mu_{01}}(1-x)^{q+\mu_{02}}G^{(i)}(x) \tag{45}$$

geschrieben werden.

2.7 Konforme Feldtheorie auf dem Torus

In den vorigen Kapiteln wurde die Theorie auf der Riemannschen Sphäre besprochen. Wird eine Theorie auf einer Riemannschen Fläche höheren Geschlechts formuliert, so ergeben sich aus der Forderung nach Konsistenz dieser Formulierung zusätzliche Einschränkungen, die zum einen den Operatorgehalt und zum anderen die globale Symmetriegruppe der Theorie betreffen. In diesem Kapitel wird der einfachste nichtsphärische Fall, der Torus, besprochen. Es seien w_1, $w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig. Man definiert den Torus als den Quotienten modulo der folgenden Äquivalenzrelation [31]:

$$z_1 \sim z_2 :\Leftrightarrow \exists\, m,\, n \in \mathbb{Z}:\ z_1 - z_2 = m w_1 + n w_2\ .$$

Je zwei Punkte der komplexen Ebene sind somit genau dann identisch, wenn ihre Differenz auf dem durch die Vektoren w_1, w_2 erzeugten Gitter liegt. Üblicherweise wählt man $w_1 = 1$, $w_2 = \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und bezeichnet τ als den *modularen Parameter*. Da Basisvektoren des o. g.

7 Eine ausführliche Diskussion der hypergeometrischen Differentialgleichung und der Lösungen findet sich in [9], S. 56ff; [1], S. 562ff

Gitters nicht eindeutig sind, kann ein und derselbe Torus durch unterschiedliche modulare Parameter beschrieben werden, solange diese dasselbe Gitter erzeugen. Der Basiswechsel in einem Gitter – Reparametrisierung des Torus – wird als *modulare Transformation* bezeichnet. Die Menge dieser Transformationen bildet die sogenannte *modulare Gruppe*. Die modulare Gruppe wird erzeugt durch die beiden Transformationen

$$\begin{aligned} &T: \ \tau \mapsto \tau + 1 \ , \\ &S: \ \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \ , \\ &(ST)^3 = S^2 = 1 \end{aligned} \tag{46}$$

und ist isomorph zu $SL_2(\mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$. Eine allgemeine modulare Transformation hat also die Gestalt

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \ .$$

Die physikalischen Größen der Theorie auf dem Torus dürfen nicht von der Wahl der Gitterbasis abhängen. Anders ausgedrückt, die Zustandssumme muss invariant unter der Wirkung der modularen Gruppe sein. Die Zustandssumme kann durch die beiden Generatoren der globalen Symmetriegruppe (auf dem Torus sind nur die Operatoren L_0 und $\bar{L}_0$ global definiert) ausgedrückt werden [17]:

$$Z(\tau) = \mathrm{Tr}\left(q^{(L_0 - c/24)}\bar{q}^{\left(\bar{L}_0 - c/24\right)}\right) \ . \tag{47}$$

Die Gleichung (19) legt den folgenden Zusammenhang mit den Virasoro-Charakteren nahe:

$$Z(\tau) = \sum_{h,\bar{h}} M_{h,\bar{h}} \chi_h(\tau) \bar{\chi}_{\bar{h}}(\bar{\tau}) \ , \tag{48}$$

wobei $M_{h,\bar{h}} \in \mathbb{N}$ die Dimension der irreduziblen Darstellung $M(c,h) \otimes \bar{M}(c,\bar{h})$ ist (vgl. (22)). Ausgehend von (48) können die Charaktere als konforme Blöcke der Nullpunkt-Korrelationsfunktion Z auf dem Torus interpretiert werden.

Modulare Gruppe und die Virasoro-Charaktere

Das Verhalten der Virasoro-Charaktere einer minimalen Theorie unter den modularen Transformationen wird durch die modularen Matrizen T und S beschrieben [17] (vgl. (46)):

$$\begin{aligned}\chi_{r,s}(\tau+1) &= \sum_{(t,v)\in I} T_{rs,tv}\chi_{t,v}(\tau)\ ,\\ \chi_{r,s}(-\frac{1}{\tau}) &= \sum_{(t,v)\in I} S_{rs,tv}\chi_{t,v}(\tau)\ ,\\ I &= \big\{(r,s) : 1\le r<p',\, 1\le s<p,\, p's<pr\big\}\ .\end{aligned} \tag{49}$$

Die modulare Invarianz von Z lässt sich nun wie folgt beschreiben [31]:

$$\big[M,T\big] = \big[M,S\big] = 0 \tag{50}$$

mit M aus (48). Fordert man noch die Existenz und Eindeutigkeit des Vakuums in der Theorie, so ergibt sich die zusätzliche Bedingung

$$M_{00} = 1\ .$$

Insgesamt folgt:

$$M_{h,\bar{h}} = \delta_{h,\bar{h}}$$

und daher vereinfacht sich (48) zu

$$Z(\tau) = \sum_h \chi_h(\tau)\bar{\chi}_h(\bar{\tau})\ .$$

Gerade aus der modularen Invarianz von Z folgt der in Unterkapitel 2. 5 angesprochene Zusammenhang, dass minimale Modelle genau diejenigen Theorien sind, in denen c und h durch (24) gegeben sind. Eine konsistente Formulierung auf dem Torus hat somit unmittelbare Auswirkungen auf die Struktur der Theorie auf der Ebene, welche die Anzahl der primären Felder (Anzahl der Verma-Moduln) betreffen.

Korrelationsfunktionen auf dem Torus

Verglichen mit dem Fall der Riemannschen Sphäre, stellt die Berechnung von Korrelationsfunktionen auf dem Torus eine wesentlich kompliziertere Aufgabe dar. In Unterkapiteln 2. 5, 2. 6 wurde diskutiert, welche Einschränkungen sich aus der konformen Symmetrie der Theorie für Korrelationsfunktionen ergeben. Die Invarianz unter der Wirkung von $SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ wird benutzt, um Zwei- und Dreipunktfunktionen vollständig und die Vierpunktfunktionen

bis auf eine Funktion einer modularen Invariante festzulegen. Für die Letztere kann eine hypergeometrische Differentialgleichung formuliert werden, die sich unmittelbar aus dem Zusammenspiel der lokalen konformen Invarianz (konforme Ward-Identität) und der Existenz von Nullzuständen ergibt.
Auf dem Torus ändern sich einige globale Eigenschaften der Theorie: Die globale Symmetriegruppe wird nur von L_0 und $\bar{L}_0$ erzeugt. Außerdem ändert die konforme Ward-Identität (33) ihre Gestalt. In Kombination mit der Nullvektor-Bedingung für primäre Felder führt sie selbst in dem einfachsten Fall eines Felds ϕ vom Gewicht $h \in \{h_{1,2},\, h_{2,1}\}$ auf die Differentialgleichung [17]

$$\begin{aligned} \Bigg[\frac{3}{2(2h+1)} \partial_z^2 - 2\eta_1 (h + z\partial_z) - 2i\pi \partial_\tau - \sum_{j=1}^{n} \left(\zeta(z - z_j) + 2\eta_1 z_j \right) \partial_{z_j} \\ - \sum_{j=1}^{n} \left(\wp(z - z_j) + 2\eta_1 \right) \Bigg] \Big(Z \langle \phi(z, \bar{z}) \ldots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \Big) = 0 \ , \end{aligned} \tag{51}$$

wobei

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{\partial_z \vartheta_1(z|\tau)}{\vartheta_1(z|\tau)} + 2\eta_1 z \ , \\ \eta_1 &= -\frac{1}{6} \frac{\partial_z^3 \vartheta_1(0|\tau)}{\partial_z \vartheta_1(0|\tau)} \ , \\ \wp(z) &= -\partial_z \zeta(z) \ , \\ \vartheta_1(z|\tau) &= -i \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} (-1)^{r-1/2} \mathrm{e}^{2\pi i r z} q^{r^2/2} \ . \end{aligned} \tag{52}$$

Die Komplexität der Ausdrücke gibt Anlass dazu, nach alternativen Ansätzen zur Berechnung der Torus-Korrelationsfunktionen zu suchen. Eine Idee besteht darin, einen Zusammenhang zwischen Torusamplituden und Korrelationsfunktionen auf der Ebene zu finden. Kann nämlich eine n-Punktfunktion auf dem Torus durch eine m-Punktfunktion auf der Riemannschen Sphäre ausgedrückt werden, so können die Berechnungen nach dem in Unterkapitel 2. 6 erläuterten Muster erfolgen, was eine erhebliche Vereinfachung darstellt. In Abschnitt 3 wird nach einer Beziehung zwischen Vierpunkt-Korrelationsfunktionen auf der Ebene und den Nullpunktfunktionen auf dem Torus in einigen minimalen Modellen gesucht.

3 Resultate für die betrachteten minimalen Modelle

In diesem Abschnitt werden einige konkrete minimale Modelle diskutiert. Es wird nach einem Zusammenhang zwischen den Vierpunkt-Korrelationsfunktionen auf der Ebene und den Nullpunktfunktionen auf dem Torus gesucht. Es wird vermutet, dass sich die Vierpunktfunktionen auf $\bar{\mathbb{C}}$ bis auf einen rationalen Ausdruck in $\eta(q^n)$ durch Linearkombinationen von minimalen Charakteren der entsprechenden Theorie darstellen lassen.
Im Ising-Modell gelingt es, eine einfache Beziehung zwischen den konformen Blöcken der Spin-Korrelationsfunktion und den Charakteren der irreduziblen Darstellungen zu finden, wohingegen der Zusammenhang im Falle der Energie-Korrelationsfunktion weniger elementar zu sein scheint. Für die Vierpunktfunktionen der übrigen Theorien wurde kein sinnvoller Zusammenhang mit den Torus-Nullpunktfunktionen gefunden.

3.1 Das Ising-Modell

Im Ising-Modell werden (neben der Identität) der Spinoperator σ und der Energieoperator ε betrachtet. Aus der statistischen Mechanik ist das folgende kritische Verhalten des Gitterspins σ_i und der Wechselwirkungsenergie $\varepsilon_i = \sigma_i\sigma_{i+1}$, die zu den oben genannten Operatoren korrespondieren, bekannt:

$$\langle \sigma_i \sigma_{i+n} \rangle \sim \frac{1}{|n|^{\frac{1}{4}}}, \qquad \langle \varepsilon_i \varepsilon_{i+n} \rangle \sim \frac{1}{|n|^2} \ .$$

Für die beiden Felder σ, ε kann daher unter der Voraussetzung $h = \bar{h}$ gefolgert werden, dass (vgl. (30))

$$h_\sigma = \bar{h}_\sigma = \frac{1}{16}, \quad h_\varepsilon = \bar{h}_\varepsilon = \frac{1}{2} \ .$$

Auf Grund dessen identifiziert man mit dem Ising-Modell das minimale Modell $\mathcal{M}(4,3)$ mit $c = \frac{1}{2}$ mit vergleichbarem Operatorgehalt [17]. Es handelt sich hierbei um das kleinste unitäre minimale Modell. In Tabelle 1 sind die konformen Dimensionen der primären Felder sowie die Entwicklung der entsprechenden minimalen Charaktere des Modells dargestellt. Im Folgenden werden die Vierpunktfunktionen der beiden auf dem zweiten Level

Konforme Gewichte	Minimale Charaktere $q^{-h_{r,s}+c/24}\chi_{r,s}(q)$
$h_{1,1} = h_{2,3} = 0$	$1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \ldots$
$h_{1,2} = h_{2,2} = \frac{1}{16}$	$1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \ldots$
$h_{2,1} = h_{1,3} = \frac{1}{2}$	$1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 4q^6 + \ldots$

Tabelle 1: Die Struktur des minimalen Modells $\mathcal{M}(4,3)$

degenerierten Felder $\phi_{(1,2)}$ und $\phi_{(2,1)}$ untersucht. Wir betrachten die Korrelationsfunktion $\langle\phi_{(1,2)}(\infty)\phi_{(1,2)}(1)\phi_{(1,2)}(0)\phi_{(1,2)}(x)\rangle$. Da das Feld $\phi_{(1,2)}$ auf Level zwei degeneriert ist, erfüllt diese Vierpunktfunktion die Differentialgleichung (vgl. (38))

$$\left(\mathcal{L}_{-2} - \frac{4}{3}\mathcal{L}_{-1}^2\right)\langle\phi_{(1,2)}(\infty)\phi_{(1,2)}(1)\phi_{(1,2)}(0)\phi_{(1,2)}(x)\rangle = 0 \ .$$

Wie in Unterkapitel 2.6 erwähnt, lässt sich diese Gleichung auf eine hypergeometrische Differentialgleichung reduzieren:

$$\left[x(1-x)\partial_x^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)\partial_x + \frac{1}{16}\right] G(x) = 0 \ .$$

Es folgt für die konformen Blöcke (vgl. (42) $-$ (45))

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(x) &= [x(x-1)]^{-\frac{1}{8}}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; x\right)\\ &= x^{-\frac{1}{8}}(1-x)^{\frac{3}{8}}{}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; x\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}{[x(1-x)]^{\frac{1}{8}}}\end{aligned} \tag{53}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(x) &= [x(x-1)]^{\frac{3}{8}}\,{}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; x\right)\\ &= x^{\frac{3}{8}}(1-x)^{-\frac{1}{8}}{}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; x\right) \ .\end{aligned} \tag{54}$$

Damit die konformen Blöcke der Vierpunktfunktion mit den Torus-Charakteren verglichen werden können, müssen jene in Abhängigkeit von dem modularen Parameter τ ausgedrückt werden. Um dies zu tun, berücksichtige man den folgenden Ausdruck für das harmonische Verhältnis [14]:

$$x = \kappa^2(\tau) = 16\frac{\eta(2\tau)^{16}\eta(\tau/2)^8}{\eta(\tau)^{24}} \ . \tag{55}$$

Hieraus ergibt sich für den ersten konformen Block

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(q) &= \left[\kappa^2(\tau)(\kappa^2(\tau)-1)\right]^{-\frac{1}{8}}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \kappa^2(\tau)\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}q^{-\frac{1}{16}}\left(1 + q^{\frac{1}{2}} + 3q + 4q^{\frac{3}{2}} + 5q^2 + 8q^{\frac{5}{2}} + 11q^3 + 15q^{\frac{7}{2}} + 22q^4\right.\\ &\left.+29q^{\frac{9}{2}} + 38q^5 + 51q^{\frac{11}{2}} + 66q^6 + \dots\right) \ .\end{aligned} \tag{56}$$

Als erstes wird der Zusammenhang mit den Charakteren χ_0 und $\chi_{1/2}$ untersucht. Dazu betrachten wir den Quotienten

$$\frac{\mathcal{F}_1(q)}{\chi_0(q)+\chi_{1/2}(q)} = \frac{\sqrt{2}}{2} q^{-\frac{1}{24}} \left(1 + 3q + 4q^2 + 7q^3 + 13q^4 + 19q^5 + 29q^6 \right. \\ \left. +43q^7 + 62q^8 + \dots\right) \ . \tag{57}$$

Man stellt fest, dass sich die rechte Seite von (57) relativ einfach durch die Dedekindsche η-Funktion ausdrücken lässt:

$$\frac{\mathcal{F}_1(q)}{\chi_0(q)+\chi_{1/2}(q)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\eta(q^2)^5}{\eta(q)^3\eta(q^4)^2} \ .$$

Analog wird der Quotient mit dem minimalen Charakter $\chi_{1/16}$ untersucht. Man erhält die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(q) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\eta(q^2)^5}{\eta(q)^3\eta(q^4)^2} \Big(\chi_0(q) + \chi_{\frac{1}{2}}(q)\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\eta(q^2)^4}{\eta(q)^2\eta(q^4)^2} \chi_{\frac{1}{16}}(\sqrt{q}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\eta(q^2)^3}{\eta(q^{\frac{1}{2}})\eta(q^4)^2} \chi_{\frac{1}{16}}(q) \ . \end{aligned} \tag{58}$$

Der zweite konforme Block ergibt sich zu

$$\mathcal{F}_2(q) = 2\sqrt{2} q^{\frac{3}{16}} \Big(1 + q^{\frac{1}{2}} + q + 2q^{\frac{3}{2}} + 4q^2 + 5q^{\frac{5}{2}} + 6q^3 + 9q^{\frac{7}{2}} + 13q^4 \\ +17q^{\frac{9}{2}} + 21q^5 + 28q^{\frac{11}{2}} + 39q^6 + \dots\Big) \ . \tag{59}$$

Auch der Quotient des zweiten Blocks mit den oben genannten Charakteren stellt einen Ausdruck in η-Funktionen dar. Das Resultat lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(q) &= 2\sqrt{2} \frac{\eta(q^4)^2}{\eta(q)\eta(q^2)} \Big(\chi_0(q) + \chi_{\frac{1}{2}}(q)\Big) = 2\sqrt{2} \frac{\eta(q^4)^2}{\eta(q^2)^2} \chi_{\frac{1}{16}}(\sqrt{q}) \\ &= 2\sqrt{2} \frac{\eta(q)^2\eta(q^4)^2}{\eta(q^{\frac{1}{2}})\eta(q^2)^3} \chi_{\frac{1}{16}}(q) \ . \end{aligned} \tag{60}$$

Insgesamt stellt man fest, dass die Vierpunktfunktion des Feldes $\phi_{(1,2)}$ einmal durch die Summe der beiden Nullpunktfunktionen χ_0, $\chi_{1/2}$ und einmal durch den Charakter $\chi_{1/16}$ der korrespondierenden irreduziblen Darstellung ausgedrückt werden kann.
Ein weiteres auf dem zweiten Level degeneriertes Feld des Ising-Modells ist $\phi_{(2,1)}$. Die zu untersuchende Vierpunkt-Korrelationsfunktion genügt der Differentialgleichung

$$\left(\mathcal{L}_{-2} - \frac{3}{4}\mathcal{L}_{-1}^2\right) \langle \phi_{(2,1)}(\infty)\phi_{(2,1)}(1)\phi_{(2,1)}(0)\phi_{(2,1)}(x)\rangle = 0 \ ,$$

und die zugehörige hypergeometrische Differentialgleichung lautet

$$\left[x(1-x)\partial_x^2 - \frac{2}{3}(1-2x)\partial_x - \frac{2}{3}\right] G(x) = 0 \ .$$

Es ergeben sich die folgenden beiden Lösungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(x) &= [x(x-1)]^{-1}\, {}_2F_1\left(-2, -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; x\right) \\ &= x^{-1}(1-x)^{\frac{2}{3}}\, {}_2F_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; x\right) \\ &= \frac{1-x+x^2}{x(1-x)}\end{aligned} \tag{61}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(x) &= [x(x-1)]^{\frac{2}{3}}\, {}_2F_1\left(\frac{4}{3}, 3; \frac{8}{3}; x\right) \\ &= x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{-1}\, {}_2F_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}; \frac{8}{3}; x\right) \ .\end{aligned} \tag{62}$$

Entwickelt man den ersten Block $\mathcal{F}_1(\kappa^2(\tau))$ nach Potenzen von q, so erhält man die Reihe

$$\mathcal{F}_1(q) = \frac{1}{16\sqrt{q}}(1 + 8q^{\frac{1}{2}} + 276q + 2048q^{\frac{3}{2}} + 11202q^2 + 49152q^{\frac{5}{2}} + 184024q^3 + \dots) \ . \tag{63}$$

Bemerkenswerterweise entsprechen die Koeffizienten von (63) den der McKay-Thompson-Reihe der Klasse 4A für das Monster.
Im Gegensatz zu (58) ist der Zusammenhang mit den minimalen Charakteren nicht mehr so elementar. Betrachtet man die Reihenentwicklung

$$\left(\chi_0(q) + \chi_{\frac{1}{2}}(q)\right)^{24} = 24 + \frac{1}{\sqrt{q}} + 276\sqrt{q} + 2048q + 11202q^{\frac{3}{2}} + 49152q^2 + 184024q^{\frac{5}{2}} + \dots \ ,$$

so erkennt man die Beziehung

$$\mathcal{F}_1(q) = \frac{1}{16}\left(\chi_0(q) + \chi_{\frac{1}{2}}(q)\right)^{24} - 1 \ . \tag{64}$$

Für den zweiten konformen Block erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(q) = 2^{\frac{8}{3}} q^{\frac{1}{3}} \Big(& 1 + 8\sqrt{q} + \frac{536}{11}q + \frac{2528}{11}q^{\frac{3}{2}} + \frac{168524}{187}q^2 + \frac{581424}{187}q^{\frac{5}{2}} \\ &+ \frac{42052224}{4301}q^3 - \frac{122814400}{4301}q^{\frac{7}{2}} + \frac{424950358}{5423}q^4 + \dots\Big) \ .\end{aligned} \tag{65}$$

In diesem Falle konnte kein sinnvoller Zusammenhang mit den Torus-Amplituden gefunden werden.

3.2 Das Lee-Yang-Modell

Wir betrachten das kleinste nichtunitäre minimale Modell $\mathcal{M}(5,2)$ mit $c = -\frac{22}{5}$. Diese Theorie

Konforme Gewichte	Minimale Charaktere $q^{-h_{r,s}+c/24}\chi_{r,s}(q)$
$h_{1,1} = 0$	$1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6 + \dots$
$h_{1,2} = h_{1,3} = -\frac{1}{5}$	$1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \dots$

Tabelle 2: Die Struktur des minimalen Modells $\mathcal{M}(5,2)$

beschreibt den kritischen Punkt des sich in einem externen Feld befindlichen Ising-Modells. Das einzige auf dem zweiten Level degenerierte Feld dieses Modell ist das Feld $\phi_{(1,2)}$ vom Gewicht $h_{1,2} = -\frac{1}{5}$. Für die entsprechende Vierpunktfunktion gilt

$$\left(\mathcal{L}_{-2} + \frac{75}{8}\mathcal{L}_{-1}^2\right)\langle\phi_{(1,2)}(\infty)\phi_{(1,2)}(1)\phi_{(1,2)}(0)\phi_{(1,2)}(x)\rangle = 0 \ .$$

Dies führt auf die Differentialglichung

$$\left[x(1-x)\partial_x^2 + \frac{4}{5}(1-2x)\partial_x - \frac{2}{25}\right] G(x) = 0 \ .$$

Die beiden konformen Blöcke ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{\frac{1}{5}} {}_2F_1\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5};\frac{4}{5};\kappa^2(\tau)\right) \\ &= (\kappa^2(\tau))^{\frac{1}{5}}(1-\kappa^2(\tau))^{\frac{2}{5}} {}_2F_1\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5};\frac{4}{5};\kappa^2(\tau)\right) \\ &= 2^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{10}}\left(1 - \frac{16}{5}\sqrt{q} + \frac{404}{75}q - \frac{3968}{375}q^{\frac{3}{2}} + \frac{660038}{35625}q^2 - \frac{8408256}{296875}q^{\frac{5}{2}}\right. \\ &\left. + \frac{6114347192}{129140625}q^3 - \frac{47415832576}{645703125}q^{\frac{7}{2}} + \frac{348977570497}{3228515625}q^4 + \dots\right) \ , \end{aligned} \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{\frac{2}{5}}\,{}_2F_1\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5};\frac{6}{5};\kappa^2(\tau)\right) \\
&= (\kappa^2(\tau))^{\frac{2}{5}}(1-\kappa^2(\tau))^{\frac{1}{5}}\,{}_2F_1\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5};\frac{6}{5};\kappa^2(\tau)\right) \\
&= 2^{\frac{8}{5}}q^{\frac{1}{5}}\left(1-\frac{16}{5}\sqrt{q}+\frac{1448}{275}q-\frac{14016}{1375}q^{\frac{3}{2}}+\frac{122324}{6875}q^2-\frac{4602464}{171875}q^{\frac{5}{2}}\right. \\
&\quad\left.+\frac{1189778624}{26640625}q^3-\frac{9209075072}{133203125}q^{\frac{7}{2}}+\frac{2754491499894}{27306640625}q^4+\dots\right) .
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Die Lösungen (66), (67) zeigen keinen Zusammenhang mit den minimalen Charakteren $\chi_{1,1}$, $\chi_{1,2}$, der mit den im Ising-Modell erzielten Ergebnissen (58), (60), (64) vergleichbar wäre.

3.3 Das trikritische Ising-Modell und das Potts-Modell

Als Letztes betrachten wir die minimalen Modelle $\mathcal{M}(5,4)$ und $\mathcal{M}(6,5)$. Die Theorie $\mathcal{M}(5,4)$

Konforme Gewichte	Minimale Charaktere $q^{-h_{r,s}+c/24}\chi_{r,s}(q)$
$h_{1,1}=h_{3,4}=0$	$1+q^2+q^3+2q^4+2q^5+4q^6+\dots$
$h_{1,2}=h_{3,3}=\frac{1}{10}$	$1+q+q^2+2q^3+3q^4+4q^5+6q^6+\dots$
$h_{1,3}=h_{3,2}=\frac{3}{5}$	$1+q+2q^2+2q^3+4q^4+5q^5+7q^6+\dots$
$h_{2,1}=h_{2,4}=\frac{7}{16}$	$1+q+q^2+2q^3+3q^4+4q^5+6q^6+\dots$
$h_{2,2}=h_{2,3}=\frac{3}{80}$	$1+q+2q^2+3q^3+4q^4+6q^5+8q^6+\dots$
$h_{3,1}=h_{1,4}=\frac{3}{2}$	$1+q+q^2+2q^3+3q^4+4q^5+6q^6+\dots$

Tabelle 3: Die Struktur des minimalen Modells $\mathcal{M}(5,4)$

mit $c=\frac{7}{10}$ beschreibt eine Variante des Ising-Modells, in der unbesetzte Gitterplätze sowie die Änderung der Anzahl der Spins zugelassen sind. Am kritischen Punkt dieses Modells koexistieren drei Phasen und daher spricht man vom *trikritischen* Ising-Modell [17].
Die Vierpunkt-Korrelationsfunktionen der beiden auf Level 2 degenerierten Felder $\phi_{(1,2)}$ und $\phi_{(2,1)}$ genügen den Gleichungen

$$\left(\mathcal{L}_2-\frac{150}{11}\mathcal{L}_1^2\right)\langle\phi_{(1,2)}(\infty)\phi_{(1,2)}(1)\phi_{(1,2)}(0)\phi_{(1,2)}(x)\rangle=0$$

und

$$\left(\mathcal{L}_2-\frac{384}{161}\mathcal{L}_1^2\right)\langle\phi_{(2,1)}(\infty)\phi_{(2,1)}(1)\phi_{(2,1)}(0)\phi_{(2,1)}(x)\rangle=0\ .$$

Hieraus ergeben sich die hypergeometrischen Differentialgleichungen

$$\left[x(1-x)\partial_x^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)\partial_x - \frac{7}{16}\right] G(x) = 0$$

bzw.

$$\left[x(1-x)\partial_x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x\right)\partial_x + \frac{5}{16}\right] G(x) = 0 \ .$$

Für die Vierpunktfunktion des Feldes $\phi_{(1,2)}$ erhält man die konformen Blöcke

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{-\frac{1}{5}} {}_2F_1\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= (\kappa^2(\tau))^{-\frac{1}{5}}(1-\kappa^2(\tau))^{\frac{2}{5}} {}_2F_1\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}; \frac{2}{5}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{10}}} \left(1 + \frac{8}{5}\sqrt{q} + \frac{1084}{175} q + \frac{9344}{875} q^{\frac{3}{2}} + \frac{1148566}{74375} q^2 + \frac{50803008}{1858375} q^{\frac{5}{2}} \right. \\ &\left. + \frac{1294121432}{27890625} q^3 + \frac{9807420928}{139453125} q^{\frac{7}{2}} + \frac{2760052850591}{25798828125} q^4 + \ldots \right) \ , \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{\frac{2}{5}} {}_2F_1\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}; \frac{8}{5}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= (\kappa^2(\tau))^{\frac{2}{5}}(1-\kappa^2(\tau))^{-\frac{1}{5}} {}_2F_1\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= 2^{\frac{8}{5}} q^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{8}{5}\sqrt{q} + \frac{856}{325} q + \frac{8096}{1625} q^{\frac{3}{2}} + \frac{1822036}{186875} q^2 + \frac{72318768}{4671875} q^{\frac{5}{2}} \right. \\ &\left. + \frac{525589824}{23359375} q^3 + \frac{4128408896}{116796875} q^{\frac{7}{2}} + \frac{1389060782718}{25111328125} q^4 + \ldots \right) \ . \end{aligned} \tag{69}$$

Für das Feld $\phi_{(2,1)}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{-\frac{7}{8}} {}_2F_1\left(-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= (\kappa^2(\tau))^{-\frac{7}{8}}(1-\kappa^2(\tau))^{\frac{5}{8}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{1}{2}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{7}{2}} q^{\frac{7}{16}}} \left(1 + 7\sqrt{q} + 154q + 973q^{\frac{3}{2}} + 4559q^2 + 17472q^{\frac{5}{2}} + 58541q^3 \right. \\ &\left. + 177486q^{\frac{7}{2}} + 497735q^4 + \ldots \right) \ , \end{aligned} \tag{70}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{\frac{5}{8}} {}_2F_1\left(\frac{5}{4},\frac{11}{4};\frac{5}{2};\kappa^2(\tau)\right)\\
&= (\kappa^2(\tau))^{\frac{5}{8}}(1-\kappa^2(\tau))^{-\frac{7}{8}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4};\frac{5}{2};\kappa^2(\tau)\right)\\
&= 2^{\frac{5}{2}} q^{\frac{5}{16}}\left(1+7\sqrt{q}+\frac{268}{7}q+163q^{\frac{3}{2}}+581q^2+1839q^{\frac{5}{2}}+5349q^3\right.\\
&\left.+14527q^{\frac{7}{2}}+37212q^4+\dots\right) \ .
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Analog wurde das Modell $\mathcal{M}(6,5)$ mit $c=\frac{4}{5}$ untersucht. Die aus den Feldern $\phi_{(1,1)}$, $\phi_{(1,3)}$,

Konforme Gewichte	Minimale Charaktere $q^{-h_{r,s}+c/24}\chi_{r,s}(q)$
$h_{1,1}=h_{4,5}=0$	$1+q^2+q^3+2q^4+2q^5+4q^6+\dots$
$h_{1,2}=h_{4,4}=\frac{1}{8}$	$1+q+q^2+2q^3+3q^4+4q^5+6q^6+\dots$
$h_{1,3}=h_{4,3}=\frac{2}{3}$	$1+q+2q^2+2q^3+4q^4+5q^5+8q^6+\dots$
$h_{1,4}=h_{4,2}=\frac{13}{8}$	$1+q+2q^2+3q^3+4q^4+6q^5+9q^6+\dots$
$h_{2,1}=h_{3,5}=\frac{2}{5}$	$1+q+q^2+2q^3+3q^4+4q^5+6q^6+\dots$
$h_{2,2}=h_{3,4}=\frac{1}{40}$	$1+q+2q^2+3q^3+4q^4+6q^5+9q^6+\dots$
$h_{2,3}=h_{3,3}=\frac{1}{15}$	$1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+10q^6+\dots$
$h_{3,1}=h_{2,5}=\frac{7}{5}$	$1+q+2q^2+2q^3+4q^4+5q^5+8q^6+\dots$
$h_{3,2}=h_{2,4}=\frac{21}{40}$	$1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+10q^6+\dots$
$h_{4,1}=h_{1,5}=3$	$1+q+2q^2+3q^3+4q^4+5q^5+8q^6+\dots$

Tabelle 4: Die Struktur des minimalen Modells $\mathcal{M}(6,5)$

$\phi_{(2,1)}$, $\phi_{(3,1)}$, $\phi_{(4,1)}$, $\phi_{(2,3)}$ bestehende Teilmenge von $\mathcal{M}(6,5)$ beschreibt den kritischen Punkt des Dreizustand-Potts-Modells [17]. Bei diesem statistischen Modell handelt es sich um eine Verallgemeinerung des Ising-Modells: Die Gitterspins des Dreizustand-Potts-Modells können drei diskrete Zustände annehmen.

Die Differentialgleichungen für die uns interessierenden Felder $\phi_{(1,2)}$ und $\phi_{(2,1)}$ lauten

$$
\left(\mathcal{L}_2-\frac{6}{5}\mathcal{L}_1^2\right)\langle\phi_{(1,2)}(\infty)\phi_{(1,2)}(1)\phi_{(1,2)}(0)\phi_{(1,2)}(x)\rangle=0\ ,
$$

$$
\left(\mathcal{L}_2-\frac{5}{6}\mathcal{L}_1^2\right)\langle\phi_{(2,1)}(\infty)\phi_{(2,1)}(1)\phi_{(2,1)}(0)\phi_{(2,1)}(x)\rangle=0\ .
$$

Dies führt auf die hypergeometrischen Differentialgleichungen

$$\left[x(1-x)\partial_x^2 + \frac{1}{3}\left(1-2x\right)\partial_x + \frac{1}{12}\right] G(x) = 0$$

bzw.

$$\left[x(1-x)\partial_x^2 - \frac{2}{5}\left(1-2x\right)\partial_x - \frac{8}{25}\right] G(x) = 0 \ .$$

Hieraus ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{-\frac{1}{4}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= (\kappa^2(\tau))^{-\frac{1}{4}}(1-\kappa^2(\tau))^{\frac{5}{12}} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= \frac{1}{2q^{\frac{1}{8}}}\Big(1 + 2\sqrt{q} + 9q + 18q^{\frac{3}{2}} + 29q^2 + 54q^{\frac{5}{2}} + 100q^3 \\ &\quad +164q^{\frac{7}{2}} + 261q^4 + \ldots\Big) \ ,\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{\frac{5}{12}} {}_2F_1\left(\frac{5}{6}, \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= (\kappa^2(\tau))^{\frac{5}{12}}(1-\kappa^2(\tau))^{-\frac{1}{4}} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= 2^{\frac{5}{3}} q^{\frac{5}{24}}\Big(1 + 2\sqrt{q} + 4q + 8q^{\frac{3}{2}} + 16q^2 + 28q^{\frac{5}{2}} + 45q^3 \\ &\quad 74q^{\frac{7}{2}} + 121q^4 + \ldots\Big) \ .\end{aligned} \tag{73}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{-\frac{4}{5}} {}_2F_1\left(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= (\kappa^2(\tau))^{-\frac{4}{5}}(1-\kappa^2(\tau))^{\frac{3}{5}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}; -\frac{2}{5}; \kappa^2(\tau)\right) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{16}{5}} q^{\frac{2}{5}}}\Big(1 + \frac{32}{5}\sqrt{q} + \frac{2832}{25}q + \frac{80768}{125}q^{\frac{3}{2}} + \frac{22216232}{8125}q^2 + \frac{1961672384}{203125}q^{\frac{5}{2}} \\ &\quad + \frac{706463770304}{23359375}q^3 + \frac{10097287743744}{116796875}q^{\frac{7}{2}} + \frac{134019851381596}{583984375}q^4 + \ldots\Big) \ ,\end{aligned} \tag{74}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(\kappa^2(\tau)) &= \left[\kappa^2(\tau)(1-\kappa^2(\tau))\right]^{\frac{3}{5}}\,{}_2F_1\left(\frac{6}{5},\frac{13}{5};\frac{12}{5};\kappa^2(\tau)\right)\\
&= (\kappa^2(\tau))^{\frac{3}{5}}(1-\kappa^2(\tau))^{-\frac{4}{5}}{}_2F_1\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5};\frac{12}{5};\kappa^2(\tau)\right)\\
&= 2^{\frac{12}{5}}q^{\frac{3}{10}}\left(1+\frac{32}{5}\sqrt{q}+\frac{13844}{425}q+\frac{275456}{2125}q^{\frac{3}{2}}+\frac{13845014}{31875}q^2+\frac{1036947968}{796875}q^{\frac{5}{2}}\right.\\
&\left.+\frac{176981936984}{49140625}q^3+\frac{6882512310272}{737109375}q^{\frac{7}{2}}+\frac{3964554447960931}{173220703125}q^4+\dots\right)\,.
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Im Falle dieser beiden minimalen Modelle konnten die berechneten Vierpunktfunktionen ebenfalls nicht durch Linearkombination von Charakteren der irreduziblen Darstellungen ausgedrückt werden.

3.4 Weiterführende Überlegungen

Obwohl es bei der Untersuchung des Ising-Modells gelungen ist, einen Zusammenhang zwischen Vierpunkt-Korrelationsfunktionen auf der Ebene und Torus-Null- und -Einpunktfunktionen zu finden, muss man spätestens nach der Betrachtung des trikritischen Ising-Modells konstatieren, dass die gewählte Vorgehensweise im Allgemeinen nicht die gewünschten Ergebnisse liefert. Es wird vermutet, dass eine der Hauptschwierigkeiten in der Tatsache besteht, dass bei den Berechnungen dieselbe Parametrisierung (55) wie bei der Untersuchung der Theorie mit $c=-2$ in [14] verwendet wurde. Wie schon am Anfang der Arbeit angesprochen wurde, besteht die Besonderheit der Theorie mit $c=-2$ darin, dass die durch die primären Felder erzeugte verzweigte Überlagerung der Riemannschen Sphäre gerade Torus-Geometrie aufweist. In diesem Falle kann der modulare Parameter durch

$$
\tau = i\frac{K'(x)}{K(x)} = i\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x\right)}
\tag{76}
$$

ausgedrückt werden. Hierbei ist $K(x)$ das vollständige elliptische Integral erster Art [1, 10]. Diese Gleichung kann nach dem elliptischen Modulus $x=\kappa^2(\tau)$, dessen Zusammenhang mit der Dedekindschen η-Funktion durch (55) gegeben ist, aufgelöst werden.

Betrachtet man eine beliebige Vierpunktfunktion, so kann die durch die vier Felder dieser Funktion erzeugte Geometrie höchstens als eine lokal torus-ähnliche verzweigte Überlagerung einer nichttrivialen Riemannschen Fläche angesehen werden [14]. In [14] wird gezeigt, dass in der Theorie mit $c=-2$ der modulare Parameter (76) durch den Quotienten aus den beiden konformen Blöcken der Korrelationsfunktion $\langle\mu\mu\mu\mu\rangle$ des einen Verzweigungspunkt simulierenden konformen Feldes μ vom Gewicht $h_{1,2}=-1/8$ dargestellt werden kann. In der zugehörigen hypergeometrischen Differentialgleichung (vgl. (43))

$$\left[x(1-x)\partial_x^2 + (d-(a+b+1)x)\,\partial_x - ab\right] G(x) = 0$$

dieser Korrelationsfunktion ist der Parameter d eine ganze Zahl[8] (genauer: $a = b = 1/2,\ d = 1$). Dies hat zur Folge, dass die Lösungen der Differentialgleichung nicht mehr durch (44) gegeben sind. Ist $d \in \mathbb{Z}$ *und* $\{a, b, d-a, d-b\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, so können die Lösungen wie folgt gewählt werden [9]:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x) &= {}_2F_1(a,b;d;x), \qquad d > 0\ , \\ G^{(1)}(x) &= x^{1-d}{}_2F_1(a-d+1, b-d+1; 2-d; x), \qquad d \leq 0 \end{aligned} \tag{77}$$

und

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x) =& {}_2F_1(a,b;1+a+b-d;1-x), \quad 1+a+b-d \neq 0,-1,-2,\dots\ , \\ G^{(2)}(x) =& (1-x)^{d-a-b} \times \\ & \times {}_2F_1(d-a,d-b;1-a-b+d;1-x), \quad 1+a+b-d = 0,-1,-2,\dots\ . \end{aligned} \tag{78}$$

Ferner gilt für $|1-x| < 1$ [9]

$${}_2F_1(a,b;a+b;1-x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k) x^k - \log(x) {}_2F_1(a,b;1;x) \right)\ , \tag{79}$$

wobei

$$f(k) = \frac{(a)_k (b)_k \left(2\psi(k+1) - \psi(a+k) - \psi(b+k)\right)}{(k!)^2}\ ,$$

und

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

ist die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion (auch *Digamma-Funktion* genannt). Im Falle $d = 1$ erhält man insgesamt (vgl. (45))

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x) &= [x(1-x)]^r\, {}_2F_1(a,b;1;x)\ , \\ \mathcal{F}_2(x) &= [x(1-x)]^r\, \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k) x^k - \log(x) {}_2F_1(a,b;1;x) \right)\ , \end{aligned} \tag{80}$$

wobei der Exponent $r \in \mathbb{Q}$ durch die konformen Gewichte der in der Korrelationsfunktion vorkommenden Felder bestimmt ist. Für die Korrelationsfunktion $\langle \mu\mu\mu\mu \rangle$ ist $a = b = 1/2$,

8 Der Parameter wird hier mit d bezeichnet, um Verwechselungen mit der zentralen Ladung c zu vermeiden.

und es ergibt sich

$$\tau = i\frac{\mathcal{F}_2(x)}{\mathcal{F}_1(x)} = i\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x\right)} \ .$$

Aus (80) erhält man mit $q = \exp(2\pi i\tau)$[9]

$$\tau = \frac{1}{2\pi i}\log(q) = \frac{i}{\pi}\left(\sum a_n x^n - \log(x)\right)$$

oder

$$q = x^2 \exp\left(\sum a_n x^n\right) \ . \tag{81}$$

Hierbei ist $\sum a_n x^n$ die Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} f(k)x^k}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x\right)} \ .$$

Man stellt fest, dass es in der Theorie mit $c = -2$ möglich ist, den Zusammenhang $x = x(q(\tau))$ zwischen der Variablen x und dem modularen Parameter τ ausschließlich aus den Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung abzuleiten, indem man die Gleichung (81) umkehrt.
Es stellt sich an dieser Stelle die Frage, ob in einer beliebigen konformen Feldtheorie ebenfalls die Möglichkeit besteht, die Gleichung $x = x(q(\tau))$ auf die oben beschriebene Weise zu erhalten.
Man betrachte das *verallgemeinerte elliptische Integral erster Art*[10]

$$K_a(x) = \sin(\pi a)\int_0^1 \frac{t^{1-2a}}{(1-t^2)^{1-a}(1-xt^2)^a}\,dt = \frac{\pi}{2}{}_2F_1(a,1-a;1;x)$$

mit

$$K_a'(x) = K_a(1-x)$$

und setze

$$\tau_a = i\frac{K_a'(x)}{K_a(x)} = i\frac{{}_2F_1(a,1-a;1;1-x)}{{}_2F_1(a,1-a;1;x)} \ . \tag{82}$$

Als *verallgemeinerter elliptischer Modulus* wird der zu (82) inverse Ausdruck $x = x(\tau_a)$ definiert. In Analogie zu dem Fall $c = -2$ wird in jedem zu untersuchenden minimalen Modell eine Vierpunktfunktion mit mindestens einem auf Level 2 degenerierten Feld gesucht, deren konforme Blöcke einen Quotienten ergeben, der für ein bestimmtes a mit (82) übereinstimmt. Anders ausgedrückt, man sucht eine Korrelationsfunktion $\langle\phi_h(x)\phi_{h_1}(0)\phi_{h_2}(1)\phi_{h_3}(\infty)\rangle$ mit

9 $\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

10 Für Details zu verallgemeinerten elliptischen Integralen und modularen Gleichungen siehe [3, 2]

$h \in \{h_{1,2}, h_{2,1}\}$, die auf hypergeometrische Differentialgleichung mit den Parametern a, $b = 1 - a$, $d = 1$ führt. Aus den Gleichungen (24), (42) und (43) kann gefolgert werden, dass

$$h_1 = h_{p',p} = -\frac{(p-p')^2}{4pp'} \tag{83}$$

gelten muss, damit $d = 1$ ist. Außerdem erhält man

$$a = \frac{p'}{p} \ .$$

Schließlich prüft man leicht nach, dass die Feldanordnung $\langle \phi_h(x)\phi_{h_{p',p}}(0)\phi_{h_{p',p}}(1)\phi_h(\infty)\rangle$ das Gewünschte leistet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x) &= [x(1-x)]^r \, {}_2F_1(a, 1-a; 1; x) \ , \\ \mathcal{F}_2(x) &= [x(1-x)]^r \, {}_2F_1(a, 1-a; 1; 1-x) \\ &= [x(1-x)]^r \, \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k) x^k - \log(x) {}_2F_1(a, 1-a; 1; x) \right) \ , \end{aligned} \tag{84}$$

und daher

$$\tau = i \frac{\mathcal{F}_2(x)}{\mathcal{F}_1(x)} = \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \log(x) \right) \ , \tag{85}$$

wobei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} f(k) x^k}{{}_2F_1\left(a, 1-a; 1; x\right)}$$

ist. Im Folgenden wird die verallgemeinerte modulare Gleichung (85) an einigen der schon diskutierten minimalen Modelle getestet.

In der minimalen Theorie $\mathcal{M}(p = 5, p' = 2)$, dem Lee-Yang-Modell, besitz die Umkehrung von (85) die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} x(q) = &\sqrt{q} - \frac{13}{25} q + \frac{125}{625} q^{3/2} - \frac{2779}{46875} q^2 + \frac{18782}{1171875} q^{5/2} - \frac{4848523}{1220703125} q^3 \\ &+ \frac{253369132}{274658203125} q^{7/2} - \frac{9791808487}{48065185546875} q^4 + \dots \ . \end{aligned} \tag{86}$$

Setzt man das Resultat in die Korrelationsfunktion $\langle\phi_{(1,2)}(\infty)\phi_{(1,2)}(1)\phi_{(1,2)}(0)\phi_{(1,2)}(x)\rangle$ ein, so erhält man (vgl. (66))

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(q) = q^{\frac{1}{10}}\Big(1 - \frac{51}{250}\sqrt{q} + \frac{1226}{46875}q - \frac{23216}{5859375}q^{3/2} + \frac{2714001}{4638671875}q^2 \\ -\frac{4361193319}{52185058593750}q^{5/2} + \frac{385564714583}{31528472900390625}q^3 - \dots\Big)\ .\end{aligned} \tag{87}$$

Bei deisem Ergebnis handelt es sich leider erneut um einen Ausdruck, der in keiner sinnvollen Relation zu den minimalen Charakteren des Modells steht.
Wesentlich vielversprechender sind die im Ising-Modell $\mathcal{M}(p=4, p'=3)$ erzielten Ergebnisse. Der verallgemeinerte elliptische Modulus besitzt hier die Entwicklung

$$\begin{aligned}x(q) =& \sqrt{q} - 40q + 1324q^{3/2} - 39872q^2 + 1136334q^{5/2} - 31239904q^3 \\ &+ 837328568q^{7/2} - 22024018432q^4 + \dots\ .\end{aligned} \tag{88}$$

Einsetzen in die Korrelationsfunktion $\langle\phi_{(1,2)}(\infty)\phi_{(1,2)}(1)\phi_{(1,2)}(0)\phi_{(1,2)}(x)\rangle$ liefert

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(q) =& \frac{1}{8^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{16}}}\Big(1 + 5\sqrt{q} + 11q + 20q^{3/2} + 41q^2 + 76q^{5/2} + 127q^3 \\ &+211q^{7/2} + 342q^4 + \dots\Big)\ .\end{aligned} \tag{89}$$

Dieser konforme Block zeigt den folgenden Zusammenhang mit den minimalen Charakteren:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(q) &= \frac{1}{64}\frac{\eta(q)^7}{\eta(\sqrt{q})^4\eta(q^2)^3}\Big(\chi_0(q) + \chi_{\frac{1}{2}}(q)\Big) \\ &= \frac{1}{64}\frac{\eta(q)^{10}}{\eta(\sqrt{q})^5\eta(q^2)^5}\chi_{\frac{1}{16}}(q)\ .\end{aligned} \tag{90}$$

Für den zweiten konformen Block gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(q) =& 8^{\frac{3}{4}}q^{\frac{3}{16}}\Big(1 + \sqrt{q} + 5q + 6q^{3/2} + 16q^2 + 21q^{5/2} + 46q^3 \\ &+61q^{7/2} + 117q^4 + \dots\Big)\ .\end{aligned} \tag{91}$$

Schließlich ergibt sich

$$\mathcal{F}_2(q) = 8^{\frac{3}{4}}\frac{\eta(q^2)^5}{\eta(q)^5}\Big(\chi_0(q) + \chi_{\frac{1}{2}}(q)\Big) = 8^{\frac{3}{4}}\frac{\eta(q^2)^3}{\eta(\sqrt{q})\eta(q)^2}\chi_{\frac{1}{16}}(q)\ . \tag{92}$$

Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden die theoretischen Grundlagen der zweidimensionalen konformen Feldtheorie zusammengefasst, die für die Arbeit mit Korrelationsfunktionen notwendig sind. Speziell für Vierpunkt-Korrelationsfunktionen mit mindestens einem auf Level 2 degenerierten Feld wurde gezeigt, wie sich die konformen Blöcke als Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung ergeben.
Im Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen standen die minimalen Modelle mit zentralen Ladungen $c = 1/2$, $c = -22/5$, $c = 7/10$ und $c = 4/5$. In jedem dieser Modelle wurden ausschließlich auf Level 2 degenerierte Felder betrachtet und ihre Vierpunkt-Korrelationsfunktionen auf der Ebene berechnet. Anschließend wurde untersucht, ob die berechneten Vierpunktfunktionen durch die Torus-Null- und -Einpunktamplituden ausgedrückt werden können. Die Berechnungen haben gezeigt, dass sich ein sinnvoller Zusammenhang nur für wenige Korrelationsfunktionen, nur die Vierpunktfunktionen des Ising-Modells, finden lässt. Maßgeblich für die zum Schluss formulierten, weiterführenden Überlegungen war die Behauptung, dass die Hauptschwierigkeit in der gewählten Formel (55) für den modularen Parameter, der in diesem Kontext von zentraler Bedeutung ist, besteht. Die Darstellung des modularen Parameters wurde gewählt wie bei der in [14] veröffentlichten Untersuchung der Theorie mit $c = -2$. In dieser Theorie erzeugen die primären Felder, als Objekte, die Verzweigungspunkte oder Pole simulieren, eine verzweigte Überlagerung der komplexen Ebene, die gerade Torus-Geometrie aufweist, und die Wahl der klassischen modularen Gleichung scheint natürlich. Die von den primären Felder einer beliebigen konformen Feldtheorie erzeugte Geometrie kann dagegen höchstens als eine lokal torus-ähnliche verzweigte Überlagerung einer nichttrivialen Riemannschen Sphäre angesehen werden. Auf Grund dessen wurde die modulare Gleichung verallgemeinert und die numerischen Berechnungen wurden mit dem neuen Parameter durchgeführt. Mit den Ansätzen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit noch möglich waren, ist es leider nicht gelungen, die restlichen Vierpunktfunktionen durch die minimalen Charaktere der jeweiligen Modelle auszudrücken. Es ist allerdings gelungen, den verallgemeinerten Modulus in jeder der betrachteten Theorien durch bestimmte Korrelationsfunktionen auszudrücken und diesen somit jedem minimalen Modell entsprechend zu wählen. Außerdem zeigen die in Abhängigkeit vom verallgemeinerten Modulus berechneten Vierpunktfunktionen des Ising-Modells einen sinnvollen Zusammenhang mit den Torusamplituden.
Es scheint sinnvoll zu sein, den Ansatz mit dem verallgemeinerten elliptischen Modulus weiter zu verfolgen. Man könnte etwa untersuchen, wie sich ganzzahlige Änderungen des modularen Parameters, Transformationen $\tau \to \mathbb{Z}\tau$, auf die Gestalt der Reihenentwicklung der Vierpunktfunktionen auswirken. Eventuell lassen sich dadurch bessere Ergebnisse erzielen.

Anhang: Implementation in Maple 12

Hier werden die in Kapitel 3 verwendeten Funktionen aus Maple 12 sowie die konkreten numerischen Berechnungen dargestellt.

Definition der grundlegenden Größen und Funktionen

Maximale Entwicklungsordnung als globale Variable:

```
N_:=300
```

Die Dedekindsche eta-Funktion (vgl. (21)):

```
eta := proc (q)
local t2, t1;
        global N_;
        t1 := q^(1/24);
        t2 := product(1-q^n, n = 1 .. N_);
        RETURN(t1*t2);
end proc;
```

Die Jacobi-Riemannsche theta-Funktion (vgl. (27)):

```
jrtheta := proc (lambda, k, q)
        local n;
        global N_;
        description "Jacobi-Riemann theta-functions";
        RETURN(sum(q^((1/4)*(2*k*n+lambda)^2/k), n = -N_ .. N_));
end proc;
```

Der klassische elliptische Modulus (vgl. (55)):

```
xi := (q) -> 16*eta(q^2)^16*eta(q^(1/2))^8/eta(q)^24;
```

Die minimalen Charaktere (vgl. (26)):

```
chi := (P, p, r, s, q) ->
(jrtheta(P*r-p*s, P*p, q)-jrtheta(P*r+p*s, P*p, q))/eta(q);
```

Angepasste Funktion für allgemeine Reihenentwicklung

```
s := (X, a, b, k) ->
                    a*q^b*sort(convert(series(q^(-b)*X/a, q, k),
                    polynom), q, tdeg, ascending);
```

Funktion zur Berechnung der Potenzen μ_{ij} in der Darstellung der Vierpunktfunktion (vgl. (40)):

```
mu := proc (h0, h1, h2, h3)
 RETURN(matrix(
  [[-(5/3)*h0+(1/3)*h1+(1/3)*h2+(1/3)*h3,
     -(2/3)*h0-(2/3)*h1+(1/3)*h2+(1/3)*h3,
     -(2/3)*h0+(1/3)*h1-(2/3)*h2+(1/3)*h3,
     -(2/3)*h0+(1/3)*h1+(1/3)*h2-(2/3)*h3],
   [-(2/3)*h0-(2/3)*h1+(1/3)*h2+(1/3)*h3,
     (1/3)*h0-(5/3)*h1+(1/3)*h2+(1/3)*h3,
     (1/3)*h0-(2/3)*h1-(2/3)*h2+(1/3)*h3,
     (1/3)*h0-(2/3)*h1+(1/3)*h2-(2/3)*h3],
   [-(2/3)*h0+(1/3)*h1-(2/3)*h2+(1/3)*h3,
     (1/3)*h0-(2/3)*h1-(2/3)*h2+(1/3)*h3,
     (1/3)*h0+(1/3)*h1-(5/3)*h2+(1/3)*h3,
     (1/3)*h0+(1/3)*h1-(2/3)*h2-(2/3)*h3],
   [-(2/3)*h0+(1/3)*h1+(1/3)*h2-(2/3)*h3,
     (1/3)*h0-(2/3)*h1+(1/3)*h2-(2/3)*h3,
     (1/3)*h0+(1/3)*h1-(2/3)*h2-(2/3)*h3,
     (1/3)*h0+(1/3)*h1+(1/3)*h2-(5/3)*h3]]));
end proc;
```

Parameter der hypergeometrischen Differentialgleichung (vgl. (42) − (43)):

```
r := proc (h0, h1, h2, h3)
      RETURN(vector([1-8*h0+16*h0^2+48*h1*h0+24*h1,
                     1-8*h0+16*h0^2+48*h2*h0+24*h2,
                     1-8*h0+16*h0^2+48*h3*h0+24*h3]));
end proc;
```

```
param := (h0, h1, h2, h3) ->
      [a = 1/2-(1/6)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[1])
             -(1/6)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[2])
             -(1/6)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[3]),
       b = 1/2-(1/6)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[1])
             -(1/6)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[2])
             +(1/6)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[3]),
       c = 1-(1/3)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[1]),
       p = 1/6-(2/3)*h0-mu(h0, h1, h2, h3)[1, 2]
             -(1/6)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[1]),
       q = 1/6-(2/3)*h0-mu(h0, h1, h2, h3)[1, 2]
             -(1/6)*sqrt(r(h0, h1, h2, h3)[2])];
```

Numerische Berechnungen

Hier wird am Beispiel des ersten konformen Blocks der Korrelationsfunktion

$$\langle \phi_{(1,2)}(\infty)\phi_{(1,2)}(1)\phi_{(1,2)}(0)\phi_{(1,2)}(x)\rangle$$

aus dem Ising-Modell beschrieben, wie die definierten MAPLE-Funktionen für die numerischen Berechnungen verwendet wurden.

```
mu(1/16,1/16,1/16,1/16)[1,2];
-1/24
mu(1/16,1/16,1/16,1/16)[1,3];
-1/24,
param(1/16,1/16,1/16,1/16)[1];
-1/4,
param(1/16,1/16,1/16,1/16)[2];
1/4
param(1/16,1/16,1/16,1/16)[3];
1/2
param(1/16,1/16,1/16,1/16)[4];
-1/12,
param(1/16,1/16,1/16,1/16)[5];
-1/12.
```

Zunächst wurde der klassische Ausdruck für den elliptischen Modulus verwendet (vgl. Unterkapitel 3.1., Gl. (55).

```
a1:=s(subs({q = s(xi(q), 1, 0, N_)},
        s(hypergeom([-1/4, 1/4], [1/2], q), 1, 0, N_))/
         (xi(q)*(1-xi(q)))^(1/8), 1, 0, 40):
a2:=s(((sqrt(2)/2)*(eta(q^2))^5/(eta(q)^3*eta(q^4)^2))
         *(chi(4,3,2,1,q)+chi(4,3,1,1,q)),1,0,40):
s(a1-a2,1,0,40);
  0
```

Dabei wurden die eta-Faktoren sukzessiv angepasst. Das Ergebnis wurde durch die Berechnung der Differenz überprüft.
Es folgen die für die Berechnung des verallgemeinerten modularen Parameters relevanten Größen (vgl. Unterkapitel 3.4, Gl. (85)):

```
p:=(a,x) -> pochhammer(x, n):
R:=(a,x) ->
```

```
            (sum(p(a, n)*p(1-a, n)*(2*Psi(n+1)
            -Psi(a+n)-Psi(1-a+n))*x^n/(n!)^2,
             n = 0 .. N_))/hypergeom([a, 1-a], [1], x):
q:=(a,x) -> x^2*exp(-2*R(a, x)):
```

Hierbei ist $q = \exp(2\pi i\tau)$. Im Ising-Modell ist $p = 4$, $p' = 3$ und somit $a = p'/p = 3/4$ (vgl. (83)). Nun wird q als Funktion von x entwickelt und die Reihe anschließend invertiert:

```
a1:=series(q(3/4,x),x,50):
Order:=45:
a2:=convert(solve(a1=q,x),polynom):
a3:=subs({q = a2}, s(hypergeom([-1/4, 1/4], [1/2], q), 1, 0, 50)):
a4:=sort(s((a2^(1/8)*(1-a2)^(1/8))*a3,1,0,40),q,tdeg,ascending):
```

Auf diese Weise wurde der konforme Block in Abhängigkeit vom verallgemeinerten Modulus berechnet. Der Rest wurde in Analogie zum klassischen Fall durchgeführt.

Danksagungen

Als allererstes möchte ich Dr. Flohr danken, der mich während dieser Diplomarbeit sehr gut betreute. Spezieller Dank gilt Professor Frahm, der sich als Korreferent dieser Arbeit zur Verfügung stellte.
Für zahlreiche sinnvolle Anmerkungen zu der Struktur sowie zum Inhalt meiner Arbeit möchte ich besonders Fabian Berski und Elsa Rakhimova danken.
Außerdem danke ich meiner Familie und meinen Freunden, die mich während meines gesamten Studiums untestützten.

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and tables*. Dover Publications, 1965.

[2] G. D. Anderson, S. L. Qiu, M. K. Vamanamurthy, and M. Vuorinen. Generalized elliptic integrals and modular equations. *Pacific journal of mathematics*, 192(1), 2000.

[3] G. D. Anderson, T. Sugawa, M. K. Vamanamurthy, and M. Vuorinen. Twice-punctured hyperbolic sphere with a conical singularity and generalized elliptic integral, 2009.

[4] K. Barron, Y.-Z. Huang, and J. Lepowsky. Factorization of formal exponentials and uniformization; [math/9908151], 1999.

[5] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241(333), 1984.

[6] Y. V. Brezhnev. On the uniformization of algebraic curves; [math/0205261]. *Moscow Math. Journ.*, 8:233, 2008.

[7] J. Cardy. Conformal invariance and statistical mechanics. In *Les Houches school on fields, strings and critical phenomena*, 1988.

[8] J. S. Caux, Ian I. Kogan, and A. M. Tsvelik. Logarithmic operators and hidden continuous symmetry in critical disordered models; [hep-th/9511134]. *Nuclear Physics B*, 466:444, 1996.

[9] A. Erdelyi. *Higher transcendental functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1953.

[10] A. Erdelyi. *Higher transcendental functions*, volume 2. McGraw-Hill, New York, 1953.

[11] H. Exton. *Handbook of Hypergeometric Integrals: Theory, Applications, Tables, Computer Programs*. Ellis Horwood, Chichester, 1978.

[12] H. Exton. *q-Hypergeometric Functions and Applications*. Ellis Horwood, Chichester, 1983.

[13] B. L. Feigin and D. B. Fuks. Verma modules over the virasoro algebra. *Funct. Anal. Appl.*, 17(241), 1983.

[14] M. A. I. Flohr. Logarithmic conformal field theory - or - how to compute a torus amplitude on the sphere; [hep-th/0407003], 2004.

[15] Michael Flohr and Matthias R. Gaberdiel. Logarithmic torus amplitudes; [hep-th/0509075]. *J.PHYS.A*, 39:1955, 2006.

[16] Michael A. I. Flohr. Null vectors in logarithmic conformal field theory; [hep-th/0009137], 2000.

[17] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal. *Conformal field theory.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[18] D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker. *Phys. Rev. Lett.*, 52(1575), 1984.

[19] P. Ginsparg. Applied conformal field theory. In *Les Houches school on fields, strings and critical phenomena*, 1988.

[20] P. Goddard and D. Olive. *Int. J. of Mod. Phys.*, A1(303), 1986.

[21] M. Green, J. Schwarz, and E. Witten. *Superstring theory.* Cambridge University Press, 1986.

[22] L. Hadasz and Z. Jaskolski. Liouville theory and uniformization of four-punctured sphere; [hep-th/0604187]. *J. Math. Phys*, 082304, 2006.

[23] C. Itzykson and C. Drouffe. *Statistical field theory*, volume 1. Cambridge University Press, 1989.

[24] V. G. Kac and M. Wakimoto. Modular invariant representations of infinite-dimensional lie algebras and superalgebras. *PNAS*, 85(14), 1988.

[25] Horst G. Kausch. Curiosities at c=-2; [hep-th/9510149], 1995.

[26] V. G. Knizhnik. Analytic fields on riemannian surfaces. *Phys. Lett.*, B180(247), 1986.

[27] Ian I. Kogan and Alex Lewis. Origin of logarithmic operators in conformal field theories; [hep-th/9705240]. *Nuclear Physics B*, 509:687, 1998.

[28] D. Lüst and S. Theisen. *Lectures on String Theory.* Springer-Verlag, 1989.

[29] Nikolay M. Nikolov and Ivan T. Todorov. Lectures on elliptic functions and modular forms in conformal field theory; [math-ph/0412039], 2004.

[30] Falk Rohsiepe. On reducible but indecomposable representations of the Virasoro algebra; [hep-th/9611160]. 1996.

[31] A. N. Schellekens. *Introduction to conformal field theory.*

[32] A. N. Schellekens. *Superstring construction*, volume 4 of *Current physics - Sources and comments.* North-Holland, 1989.

[33] G. M. T. Watts. A crossing probability for critical percolation in two dimensions; [cond-mat/9603167]. *J. Phys.*, A29:L363, 1996.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig verfasst und keine weiteren als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Hannover, den 15.August 2009

(Sergej Mikheev)