Michael Flohr ·◇· Institute for Advanced Study ·◇· School of Natural Sciences
Olden Lane ·◇· Princeton ·◇· New Jersey ·◇· 08540 ·◇· USA
Phone: (609)-734-8168 ·◇· Fax: (609)-924-8399 ·◇· Email: flohr@sns.ias.edu

Über die Klassifikation und Modul-Räume von (supersymmetrischen) konformen Quantenfeldtheorien*

·◇· I ·◇·
Einleitung

Konforme Feldtheorie (CFT) hat sich seit der legendären Arbeit von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov [BPZ] im Jahre 1984 zu einem der leistungsfähigsten Werkzeuge der mathematischen Physik entwickelt, und hat ferner zahllose erfolgreiche Anwendungen in den verschiedensten Gebieten der Physik und Mathematik erfahren. Vermutlich wird CFT in wenigen Jahren genauso "Standardstoff" sein, wie es heute bereits Lie-Algebren sind, die seinerzeit ebenfalls das Denken in der Physik revolutionierten. Dennoch gibt es einen entscheidenden Unterschied, nämlich daß Lie-Algebren seit längerem vollständig klassifiziert sind, CFTs dahingegen eigentlich kaum.

In diesem Bericht möchte ich daher zweierlei Ziel verfolgen: Zum einen werde ich meine eigenen Beiträge zur Klassifikation von CFTs vorstellen und in den aktuellen Stand der allgemeinen Forschung einreihen, zum anderen werde ich anhand einiger Anwendungen versuchen deutlich zu machen, daß Klassifikationen über die reine Befriedigung eines Enzyklopädisten hinaus von großem Nutzen sein können. Ich beschränke mich dabei auf Anwendungen, die von mir selbst, oder unter meiner Mitwirkung, innerhalb des von der DFG geförderten Zeitraumes gemacht worden sind.

Die Untersuchung von Modulräumen von CFTs ist ein besonders leistungsfähiges Mittel, um Klassifikationen für bestimmte wohldefinierte Klassen von CFTs zu erreichen. Die A-D-E-Klassifikation sowohl der minimalen Modell [CIZ] als auch der CFTs mit zentraler Ladung $c = 1$ [Gin] mögen als Beispiele dienen. Das Verblüffende an diesen Beispielen ist, daß tiefe mathematische Ergebnisse über Modulformen es gestatten, das Problem auf ein bereits bekanntes – eben die Klassifikation von Lie-Algebren – abzubilden. Es ist daher kaum verwunderlich, daß diese Teilklassifikationen die ersten Erfolge auf dem Gebiet der CFTs waren. Ähnlich verhält es sich mit der Klassifikation bestimmter CFTs mit $c = 24$, die sich als äquivalent zur Klassifikation aller selbstdualen Gitter in 24 Dimensionen erwies (allgemeiner gibt es eine enge Beziehung zwischen sogenannten meromorphen CFTs mit $c \equiv 0 \mod 8$, und selbstdualen Gittern und Codes).

Es heißt, daß Publikationen den Abschlußbericht nicht ersetzen können, was für mich impliziert, daß der Abschlußbericht auch nicht einfach eine Inhaltsangabe meiner Publikationen sein soll. Vielmehr soll dieser Bericht die Bedeutung der von mir erzielten Resultate und ihren inneren Zusammenhang – sozusagen den roten Faden – zum Gegenstand haben.

*Abschlußbericht über mein von der DFG unter der Nummer FL 259/1-2 gefördertes Forschungsvorhaben am Institute for Advanced Study, Princeton, USA. Verfaßt September 1997.

Die im Rahmen dieses Forschungsprojektes von mir publizierten Arbeiten, auf die sich dieser Bericht stützt, seien hier zunächst angegeben.

[1] M. Flohr, *On Modular Invariant Partition Functions of Conformal Field Theories with Logarithmic Operators,* Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 4147-4172 [hep-th/9509166]

[2] M. Flohr, *Fusion and Tensoring of Conformal Field Theory and Composite Fermion Picture of Fractional Quantum Hall Effect*, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 55-68 [hep-th/9605152]

[3] M. Flohr, *On Fusion Rules in Logarithmic Conformal Field Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 1943-1958 [hep-th/9605151]

[4] M. Flohr, *2-Dimensional Turbulence: A Novel Approach via Logarithmic Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B482** (1996) 567-578 [hep-th/9606130]

[5] M. Flohr, V. Gurarie, C. Nayak, *The Haldane-Rezayi Quantum Hall State and Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B498** (1997) 513-538 [cond-mat/9701212]

[6] R. Blumenhagen, M. Flohr, *Aspects of* $(0,2)$ *Orbifolds and Mirror Symmetry*, Phys. Lett. **B404** (1997) 41-48 [hep-th/9702199]

[7] M. Flohr, *Singular Vectors in Logarithmic Conformal Field Theories*, preprint IASSNS-HEP-97/73 (1997), submitted to Nucl. Phys. **B** [hep-th/9707090]

Wie schon angedeutet, ist die Klassifikation von CFTs wesentlich komplexer als die der Lie-Algebren. Ein erster, wichtiger, Schritt ist eine präzise Fragestellung. Im Falle der CFTs wird sie dadurch erreicht, daß man sich auf sogenannte rationale konforme Feldtheorien (RCFTs) konzentriert. RCFTs lassen sich dadurch charakterisieren, daß sie nur endlich viele irreduzible oder unzerlegbare Höchstgewichtsdarstellungen zulassen, oder dadurch, daß ihr Feldinhalt endlich erzeugt ist. Solche RCFTs sind damit – im Prinzip – vollständig lösbar, was meint, daß man – theoretisch – alle n-Punkt-Funktionen explizit und exakt berechnen kann. Dies liegt darin begründet, daß RCFTs eine Vielzahl von sehr restriktiven Strukturen besitzen, wie z.B. die Verlinde-Algebra der Fusionsregeln. Der Grenzfall von RCFTs sind die sogenannten quasirationalen CFTs, die anstatt endlich vieler abzählbar viele Darstellungen zulassen, in deren Fusionsregeln aber immer nur endlich viele nicht verschwindende Terme auftreten. Beispiele für quasirationale CFTs sind die $c = 1$ Theorien mit einem Kompaktifizierungsradius R, so daß $2R^2 \notin \mathbb{Q}$. Im folgenden werden wir uns auf diese beiden Fälle konzentrieren, da die irrationalen CFTs nicht im eigentlichen Sinne des Wortes klassifizierbar sind. Daher sei im folgenden unter CFT immer eine rationale oder quasirationale CFT verstanden.

CFTs kann man prinzipiell für beliebige Dimensionen d definieren, und mit beliebigen Anzahlen N von Grassmann-Variablen als supersymmetrischen Erweiterungen. Die dritte entscheidende Größe ist die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade, $c_{\rm eff}$. Für unitäre CFTs ist $c_{\rm eff} = c$, also gleich der zentralen Ladung. Im Falle nicht-unitärer Theorien, die in der statistischen Physik eine zunehmend tragende Rolle spielen, hat man hingegen $c_{\rm eff} = c - 24h_{\min}$, wobei $h_{\min}$ der kleinste L_0 Eigenwert ist (L_0 ist der Nullmode des Energie-Impuls-Tensors, dem Generator infinitesimaler konformer Transformationen). Da man für $d > 2$ weder Felder sauber an Punkten lokalisieren kann, noch über eine mathematisch einwandfreie Definition der Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) verfügt, sind fast alle Resulate für $d \leq 2$ erzielt worden.

Teilt man den Modulraum $\mathcal{M}$ aller CFTs bezüglich d, N und $c_{\rm eff}$ ein, kann man ermessen, wie dürftig unser Wissen noch ist. Vollständig klassifiziert sind lediglich die Bereiche $\mathcal{M}(d{=}1, N \leq 2, c_{\text{eff}})$ sowie $\mathcal{M}(d{=}2, N \leq 2, c_{\text{eff}} < 1 + \frac{N}{2} + \lfloor\frac{N}{2}\rfloor)$, siehe dazu auch [Nah]. Mein eigener Beitrag zur Erweiterung dieses Wissens nimmt sich in dieser Notation geradezu lächerlich aus, besteht er doch in der Ersetzung des letzten "$<$" durch "$\leq$". Allerdings brachte diese Ersetzung die Entdeckung mehrerer völlig neuer Serien von RCFTs mit sich, sowie die Etablierung einer bis dahin nahezu unbekannten Klasse von CFTs, den sogenannten logarithmischen konformen Feldtheorien (LCFTs), die wie ihre bekannteren Brüder (quasi-) rational sind. Es ist leicht einzusehen, daß $2c_{\text{eff}} \in \mathbb{Z}_+$ Häufungspunkte für Folgen von CFTs in $\mathcal{M}$ sind**. Weitaus weniger trivial ist die Frage, ob die Limespunkte noch zu $\mathcal{M}$ gehören. Für die Folge der unitären minimalen Modelle mit $\{c_{p,p+1} = 1 - 6/p(p+1)\}_{p>1}$ (hier ist $\mathfrak{g} = A_1$) ist dies der Fall, der Limespunkt $c_{\infty,\infty+1} = 1$ ist das Gauss-Modell mit Kompaktifizierungsradius $R = 1$, eine wohlbekannte CFT. Ich konnte nun zeigen, daß in vielen Fällen die Theorien an Limespunkten keine gewöhnlichen, sondern logarithmische CFTs sein müssen. In diesem Sinne bilden die LCFTs den Abschluß von $\mathcal{M}$. Verwendet man als Abstandsfunktion die Zamolodchikov-Metrik, kann man $\bar{\mathcal{M}}$ als verallgemeinerten Hilbertraum ansehen (zumindest lokal hat $\bar{\mathcal{M}}$ diese Struktur). Die Rolle der LCFTs als Abschluß erscheint dann besonders natürlich.

Bei der obigen Betrachtung sind die CFTs entweder chiral, oder aus zwei äquivalenten Theorien als rechts- und linkschiraler Hälfte symmetrisch tensoriert. In bestimmten Fällen, wie der A-D-E-Klassifikation der minimalen Modelle, gibt es auch nicht-triviale Kombinationen der beiden Hälften, die zu nicht-diagonalen modulinvarianten Zustandssummen korrespondieren. Da OPE und Normalordnung nur für lokale Felder in mathematischer Strenge definiert werden können, sind CFTs nur dann wohldefiniert, wenn sie so aus rechts- und linkschiralen Anteilen konstruiert werden, daß alle Felder lokal sind. Dieser Ansatz impliziert jedoch nicht notwendig, daß der Grad der Supersymmetry in beiden Hälften der gleiche ist. Für Stringtheorien sind nämlich auch CFTs interessant, die unterschiedliche Grade an Supersymmetry aufweisen. Dann kann die linkschirale CFT aber nicht äquivalent zur rechtschiralen sein. Überraschenderweise gibt es aber unter speziellen Umständen trotzdem modulinvariante Kombinationen. Ein Dilemma der Stringtheorie ist, daß man mit (hoher) Supersymmetrie viele rigorose Resultate erhalten kann (z.B. wegen der damit verbundenen Invarianz vieler Größen unter Renormierung), aber die Natur keine oder höchstens sehr wenig Supersymmetrie aufzeigt. Ein möglicher Kompromiß ist, statt der üblichen (2,2) Supersymmetrie die einseitig vollständig reduzierte (0,2) Supersymmetrie zu betrachten – den heterotischen String. In der Tat existieren solche Modelle, und weisen zum Teil sogar phänomenologisch interessante Spektren oder Eichgruppen auf.

Die Erforschung solcher möglicher String-Hintergrundsvakua, als die man diese Modelle ansehen sollte, wird durch die Frage nach der Kompaktifizierung der "überzähligen" Dimensionen der Stringtheorie verkompliziert. Besonders geeignet für die Kompaktifizierung sind die sogenannten Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten. Dies liegt vor allem in der Eigenschaft der Mirror-Symmetrie begründet, die eng mit der sogenannten T-Dualität der zugrundeliegenden Stringtheorien verknüpft ist. Für die Stringtheoretiker ist es daher von großem

**Für halb- oder ganzzahlige zentrale Ladung existieren immer CFTs im Sinne von Freie-Feld-Konstruktionen. Wählt man die freien Felder aus einem maximalen abelschen Torus einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so häufen sich die minimalen Modelle, die man mit Hilfe der Sugawara-Konstruktion von der affinisierten Lie-Algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ zu rationalem Level erhält, bei $c = \text{rank}\,\mathfrak{g}$. Entsprechendes gilt für CFTs, die aus freien Fermionen konstruiert werden etc.

Interesse, jeweils Mirror-Symmetrie für neue Klassen von Modellen zu etablieren. Dabei studiert man nicht mehr direkt die zweidimensionale Weltflächen-CFT, sondern, zum Beispiel, ein Landau-Ginzburg Model in d=6. Die Zustandssumme ersetzt sich durch den sogenannten elliptischen Genus, für den aber ebenfalls Modulinvarianz gefordert wird. Im Falle der (2,2) Modelle sowie deren Orbifolds kann Mirror-Symmetrie sogar strickt bewiesen werden (wenn man von den Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten zu der etwas allgemeineren Klasse der toroidalen Varietäten übergeht). Für die (0,2) Modelle funktioniert dieser Beweis mangels ausreichender Supersymmetrie leider nicht, obwohl eine bestimmte Klasse dieser Modelle Mirror-Symmetrie aufweist. Auch waren Orbifolds von (0,2) Modellen bis vor Kurzem noch gar nicht betrachtet worden. Meine Betrachtungen (zusammen mit Ralph Blumenhagen) des Modulraumes von (0,2) Orbifold-Modellen zeigen nun, daß (0,2) Modelle zunächst um Größenordnungen mehr Orbifolds besitzen, als ihre (2,2) Brüder, und daß die Menge all dieser Orbifolds Mirror-Symmetrie aufweist. Zwar sind wir von einem mathematisch strengen Beweis dieser Aussage noch ein gutes Stück entfernt, können aber durch umfangreiche explizite Rechnungen und auch allgemeine Betrachtungen zumindest für die (0,2) Modelle Mirror-Symmetrie nachweisen, die als ein speziellen $\mathbb{Z}_2$ Orbifold eines (2,2) Modelles aufgefaßt werden können. Außerdem haben wir Hinweise entdeckt, daß Mirror-Symmetrie allgemeiner auch für beliebige (0,2) Modelle gilt, selbst wenn es zu ihnen keinerlei (2,2) Brüder gibt. Dieses Resultat ist insofern bedeutsam, als daß aus ihm folgen würde, daß Mirror-Symmetrie letztlich *nicht* in Supersymmetrie begründet ist. Durch unsere Untersuchung des (0,2) Orbifold Modulraumes haben wir im Meer der möglichen String-Vakua etwas Neuland gewonnen, aber auch neue – noch ferne – Ufer gesichtet.

Nach diesem kurzen Überblick möchte ich im folgenden Kapitel die wichtigsten Resultate etwas mehr im Detail betrachten und kommentieren.

· ◇ · II · ◇ ·
Klassifikationen & Modulräume
Neue Erträge

· ◇ · A · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · Logarithmisch Konforme Feldtheorien · ◇ ·

Ausgangspunkt meiner Untersuchungen zu LCFTs war das Auffinden bestimmter erweiterter chiraler Symmetrie-Algebren (sogenannter $\mathcal{W}$-Algebren), die für $c = c_{p,1}$ existieren, maximal sind, und dennoch keine RCFT zu liefern scheinen [BFKNRV,EFH^{2}V]. Eine Manifestation des Problems ist, daß der Charakter der Vakuumdarstellung zwar leich explizit bestimmt werden kann, aber kein gutartiges Transformationsverhalten unter der Modulgruppe besitzt. Es zeigte sich, daß der Vakuumcharakter eine Linearkombination aus Modulformen mit unterschiedichen Gewichten ist (man erwartet allein Gewicht 0 Modulformen), so daß die S-Transformation $\tau \mapsto -1/\tau$ nicht nur konstante Koeffizienten besitzt, sondern auch solche linear in τ.

Unabhängig davon hat Viktor Gurarie [Gur] festgestellt, daß die CFT mit $c = c_{2,1}(\mathfrak{a}_1) = -2$ unvermeidlich logarithmische Singularitäten in ihren Korrelationsfunktionen aufweist. Obwohl diese CFT weiterhin widerspruchsfrei definiert werden kann, lassen sich die logarithmischen Terme nicht beseitigen, was letztlich darin begründet liegt, daß L_0, der Nullmode des Virasoro-Feldes, nicht diagonalisiert werden kann. Dies war das erste Beispiel einer LCFT in der Literatur. Man betrachtete allerdings $c = -2$ zunächst als eine Art Kuriosität im CFT-Zoo.

Ich darf nun für mich in Anspruch nehmen, LCFTs als echte Klasse von CFTs etabliert zu haben, und sämtliche Strukturen, die Rationalität von CFTs kennzeichnen, für den logarithmischen Fall verallgemeinert zu haben [1,3]. Dies schließt insbesondere die Betrachtung des Transformationsverhaltens der Charaktere unter der Modulgruppe sowie die Klassifikation der modulinvarianten Zustandssummen ein. Damit war es mir möglich, den Modulraum der $c_{\text{eff}} = 1$ LCFTs vollständig zu beschreiben. Die Bedeutung dieser Resultate liegt vor allem darin, daß LCFTs nicht mehr als eine bloße Kuriosität angesehen werden, sondern ein neuer und aktiver Gegenstand breiter Forschung und Anwendung geworden sind [log].

Die Möglichkeit, konforme Feldtheorien auch dann konsistent konstruieren zu können, wenn die Korrelationsfunktionen logarithmische Terme aufweisen, wurde erstmals 1993 von V citor Gurarie [Gur] erkannt. Es zeigte sich, daß, logarithmische Terme unvermeidlich sind und ferner der Energie-Operator L_0 nicht mehr diagonalisiert werden kann, wenn die Operatorproduktentwicklung zweier Felder zwei Felder mit gleichen Skalendimensionen enthält.

In [1] habe ich allgemein für LCFTs Darstellungstheorie und Charaktere definiert. Ist für eine beliebige CFT die maximal erweiterte chirale Symmetrie-Algebra bekannt, kann zumindest die Vakuumdarstellung $M_{|0\rangle}$ explizit konstruiert werden. Damit hat man auch den Vakuumcharakter $\chi_{|0\rangle} = \mathrm{tr}_{M_{|0\rangle}} q^{L_0 - c/24}$. Ich habe nun gezeigt, daß die für gewöhnliche CFTs bekannten Eigenschaften der Charaktere und Zustandssumme im analytischen Sinne auch für den Fall logarithmischer CFTs gelten. Ist ferner bekannt, daß nur für bestimmte, endlich viele Höchstgewichtszustände*** $|h_i\rangle$, $0 \le i \le n$, Darstellungen existieren, kann mit Hilfe der Höchstgewichte und des Vakuumcharakters die modulare Differentialgleichung gelöst und eine Basis von Funktionen gefunden werden, aus denen die restlichen Charaktere linear zu kombinieren sind. Die LCFT Serie mit zentraler Ladung $c = c_{p,1}(\mathfrak{a}_1) = 13 - 6(p + p^{-1})$ z.B. erfüllt diese Voraussetzungen.

Im Falle von LCFTs ergeben sich zwei Besonderheiten: Zum einen erhält man über einen Potenzreihenansatz

$$f^{(h_i)}(q) = q^{h_i - c/24} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n^{(h_i)} q^n \tag{1}$$

keinen vollständigen Satz von Lösungen mehr, für die restlichen muß man stattdessen den Ansatz

$$g^{(h_j)}(q) = \log(q) q^{h_j - c/24} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} b_n^{(h_j)} q^n \tag{2}$$

machen. Zum anderen existieren bei LCFTs immer Paare von Höchstgewichten h_i, h_j mit $h_i - h_j \in \mathbb{Z}$. Die durch L_0 auf einer Darstellung $M_{|h_i\rangle}$ induzierte Graduierung erzwingt, daß die q-Entwicklung des Charakters $\chi_{|h_i\rangle}$ bis auf einen rationalen Vorfaktor nur ganzzahlige Potenzen in q aufweist. Bei gewöhnlichen CFTs mit maximal erweiterter chiraler Symmetrie-Algebra ist immer $h_i - h_j \notin \mathbb{Z}$, so daß die Charaktere direkt porportional zu den Lösungen $f^{(h_i)}(q)$ sind. Die Sachlage ist also für LCFTs komplizierter. Die Charaktere sind nicht eindeutig festgelegt, sondern Linearkombinationen der Lösungen, für die $h_i - h_j \in \mathbb{Z}$ liegt. Ferner erhebt sich die Frage nach der physikalischen Bedeutung der $\log(q)$ Terme, die zum Erhalt der modularen Kovarianz erforderlich sind.

Die Definition von Charakteren als Spur über den jeweiligen Darstellungsmodul kann zwar formal für nicht-diagonalisierbares L_0 aufrecht erhalten werden, liefert aber ebenfalls

***Der Einfachheit halber beschränke ich mich in dieser Präsentation auf Höchstgewichte nur bezüglich der Virasoro-Algebra, bzw. bezüglich $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1$.

kein eindeutiges Ergebnis mehr. Dies liegt daran, daß verschiedene Höchstgewichtszustände eine Jordan-Zelle aufspannen, innerhalb derer eine beliebige Basis gewählt werden kann. Entsprechend erhält man verschiedene Charaktere, deren Summe allerdings invariant unter solchen Basiswechseln ist. Sie entspricht der Spur über den Modul zu allen die Jordan-Zelle aufspannenden Höchstgewichtszuständen. Sei beispielsweise eine Jordan-Zelle vom Range zwei aufgespannt durch $|h;1\rangle$ und $|h;2\rangle$, dann ist

$$\chi_{|h;1\rangle}(q) + \chi_{|h;2\rangle}(q) = \chi_{|h;1\rangle\cup|h;2\rangle}(q) = \mathrm{tr}_{M_{|h;1\rangle}\cup M_{|h;2\rangle}} q^{L_0 - c/24} \tag{3}$$

invariant unter einem Basiswechsel in $|h;1\rangle, |h;2\rangle$. Betrachtet man nur letztere Summe als Charakter (zu einer nicht vollständig reduziblen Darstellungen über die gesamte Jordan-Zelle), so wird die spezielle Struktur der LCFT unsichtbar und Charaktere und Zustandssumme werden äquivalent*◇ zu denen gewöhnlicher CFTs (im Falle der $c_{p,1}(\mathfrak{a}_1)$ Serie werden die Zustandssummen identisch zu den bekannten $Z(R)$ der $c = 1$ Modelle mit Kompaktifizierungsradius $R = \sqrt{p/2}$).

Dies ist unbefriedigend und deckt sich nicht mit expliziten Berechnungen (z.B. des Vakuumcharakters). Außerdem kann dieser Ansatz nicht erklären, daß bei LCFTs die Quantengruppenstruktur, die jeder CFT unterliegt, direkt sichtbar wird. Ich habe daher die Lösungen der modularen Differentialgleichung als Bausteine für die Charaktere akzeptiert und alle weitern Schlußfolgerungen aus den Transformationseigenschaften der Charaktere und Zustandssummen unter der Modulgruppe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ gewonnen.

Meine Arbeit [1] setzt mit der Konstruktion toroidaler Zustandssummen fort. Die Forderung von Modulinvarianz ist so restriktiv, daß sich damit die Charaktere fast eindeutig bestimmen lassen. Die als Beispiel betrachtete $c_{p,1}(\mathfrak{a}_1)$ Serie erweist sich als die Teilmenge der rationalen LCFTs mit $c_{\mathrm{eff}} = c - 24h_{\mathrm{min}} = 1$, wobei h_{min} wieder das Minimum aller zulässigen Höchstgewichte bezeichnet. Der Modulraum dieser LCFTs entspricht dem der wohlbekannten unitären $c = 1$ Theorien und erlaubt eine äquivalente A-D-E-Klassifikation. Auch die Zustandssummen stellen eine Verallgemeinerung von Zustandssummen gewöhnlicher CFTs im analytischen Sinne dar. Sie ergeben sich aus denen der $c = 1$ Modelle als

$$\sum_k c_k \left(1 + \frac{8R_k^4}{\pi i} \frac{\partial}{\partial(2R_k^2)}\right) Z(R_k)\,, \tag{4}$$

wobei die Kompaktifizierungsradii R_k und die $c_k \in \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$ durch die A-D-E-Klassifikation der endlichen Untergruppen von $\mathrm{SU}(2)$ bestimmt sind.

Zum Schluß von [1] behandelte ich den speziellen Fall $c_{2,1}(\mathfrak{a}_1) = -2$ ausführlich. Anhand dieses Beispiels zeigte ich explizit auf, daß der von mir verfolgte Ansatz auch physikalisch sinnvoll ist. Die $c = -2$ Theorie beschreibt nämlich die dichte Phase zweidimensionaler Polymere. Setzt man die Polymere auf einen Torus, hat man unterschiedliche Randbedingungen für nicht-kontrahierbare Polymere (die also homotop zu den fundamentalen Zyklen des Torus sind), die entsprechende Teile der Zustandssumme liefern. Die algebraische Struktur (beschrieben durch eine Temperley-Lieb Algebra, die man als Schneide- und Verklebe-Operationen auf den Polymeren interpretieren kann) erlaubt allerdings zwei Grundzustände:

*◇Eine genaue Betrachtung zeigt, daß die Zustandssummen von LCFTs ganze Vielfache der Zustandssummen der korrespondierenden freien CFTs sind. Diese nicht-triviale Multiplizität, die durch Abzählen der Zustände z.B. im Vakuumsektor explizit überprüft werden kann, geht leider ebenfalls bei obiger, vereinfachender Betrachtung verloren. Im Falle der $c_{p,1}(\mathfrak{a}_1)$ LCFTs ist die Multiplizität genau 4.

den leeren Torus und einen dicht mit genau einem kontrahierbaren Polymer bedeckten Torus. Genau dies kann man auch durch eine Konstruktion mit einem b, c System sehen. Die Felder b, c haben Fermi-Statistik und konforme Gewichte $1, 0$. Es gibt daher zwei Grundzustände, $|0\rangle$ und $c_0|0\rangle$. Der zweite Grundzustand bringt aber nun als zusätzlichen Freiheitsgrad die Konfigurationen eines kontrahierbaren Polymers ins Spiel. Dies liefert genau den logarithmischen Anteil der Zustandssumme, proportional zu $\log(q\bar{q})$.

Vielen Argumenten von [1] lag die Annahme zugrunde, daß LCFTs, bestimmt durch ihre Parameter wie zentrale Ladung c und Höchstgewichte $\{h_i\}_{i\in I}$, im Raum aller CFTs "singuläre" Punkte darstellen, wobei das Verhalten der Feldtheorie in analytischer Weise von den Parametern abhängt. Diese Annahme habe ich in [3] für eine weite Klasse von LCFTs beweisen können. Genauer stellte sich heraus, daß LCFTs im Abschluß des Raumes $\mathcal{M}$ der CFTs im Raum aller zweidimensionalen Feldtheorien liegen, also durch geeignete Folgen von CFTs analytisch wohldefiniert als Limes approximiert werden. Die $c_{p,1}(\mathfrak{a}_1)$ Serie ergibt sich beispielsweise als Limes von Folgen minimaler Modelle mit zentralen Ladungen $c_{p_n,q_n}(\mathfrak{a}_1)$, so daß der teilerfremde Bruch p_n/q_n gegen den kürzbaren Bruch np/n konvergiert. Man beachte, daß es eine Vielzahl von Folgen minimaler Modelle gibt, die gegen dieselbe LCFT konvergieren. Das hat sehr interessante Auswirkungen auf Zamolodchikov's c-Theorem und die Topologie des Raumes $\mathcal{M}$. Ich arbeite zur Zeit zusammen mit Mohammad Reza, Rahimi Tabar und Shahin Rouhani an einer genauen Darstellung dieser nicht-trivialen Topologie. Die Zamolodchikov-Metrik auf $\mathcal{M}$ wird – wenn nicht korrekt normiert – an LCFT-Punkten singulär. Beachtet man jedoch, daß der Limespunkt eine LCFT ist, muß man die Ströme, aus denen die Metrik gebildet wird, umdefinieren. Damit bleibt die Metrik regulär, erlaubt aber nun geschlossene Wege des c-Flußes!

Im obigen Sinne konnte ich weiter zeigen, daß die Charaktere logarithmsicher CFTs aus den Charakteren der minimalen Modelle im Limes gewonnen werden können. Dabei treten notwendigerweise auch die Ableitungen letzterer bezüglich der Parameter auf, die das konforme Gewicht bestimmen, d.h.

$$\chi^{(p,1)}_{|h_{r,s}\rangle} \propto \lim_{n\to\infty}\left(a\chi^{(p_n,q_n)}_{|h^{(p_n,q_n)}_{r,s}\rangle} + b\frac{\partial}{\partial\lambda}\chi^{(p_n,q_n)}_{|h^{(p_n,q_n)}_{r,s}\rangle}\right) \tag{5}$$

mit $\lambda = p_n s - q_n r$. Die Ableitung hat unter anderem zur Wirkung, daß der Charakter einen Term linear in $\tau \equiv \log(q)$ erhält.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen CFTs, wo die Charaktere Modulformen zum Gewicht null sein müssen, treten bei LCFTs Modulformen mit verschiedenen ganzzahligen Gewichten auf. Bei den bis jetzt explizit bekannten Beispielen sind die Modulformen vom Gewicht 0 und 1. Für $c_{\text{eff}} \leq 1$ ist damit eine Klassifikation aller LCFTs möglich, da die entsprechenden Modulformen vollständig bekannt sind. Ein generischer Charakter hat in diesem Fall die Form

$$\chi_\lambda(q) = \frac{1}{\eta(q)}\left(\alpha\Theta_{\lambda,k}(q) + (\beta + \gamma\log(q))(\partial\Theta)_{\lambda,k}(q)\right), \tag{6}$$

wobei $\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-q^n)$ die Dedekind Funktion und $\Theta_{\lambda,k}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(2kn+\lambda)^2/4k}$ die Jacobi-Riemann Funktionen sind. Die $(\partial\Theta)_{\lambda,k}(q) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Theta_{\lambda,k}(q) \propto \sum_{n\in\mathbb{Z}}(2kn+\lambda)q^{(2kn+\lambda)^2/4k}$ heißen auch affine Θ-Funktionen und haben das modulare Gewicht $\frac{3}{2}$. Dies und die Kenntnis möglicher integrabler marginaler Operatoren erlaubte es mir, in [1] die genaue Form des Modulraumes der $c_{\text{eff}} = 1$ LCFTs angeben zu können. Dieser Modulraum bildet teilweise den Abschluß des $c_{\text{eff}} < 1$ Modulraumes gewöhnlicher CFTs, ein anderer Teil wird durch den Modulraum der $c = 1$ CFTs [DV^2,Gin,Kir] und dessen nicht-unitäre Erweiterung gegeben. Letztere habe ich bereits in [Flo2,Flo3] konstruiert. Allgemeiner darf man schreiben, daß $\mathcal{M}(LCFT) \subset \partial\mathcal{M}(CFT)$.

Natürlich kann man fragen, wozu Korrekturen höherer Ordnung korrespondieren würden. Bis jetzt waren die behandelten Klassen von LCFTs solche, bei denen L_0 Jordan-Zellen vom Range $r \leq 2$ formten. LCFTs lassen sich jedoch ohne weiteres für beliebigen Rang der Jordan-Zellen konstruieren, wobei der maximale Rang zur maximalen Ordnung der Ableitungsterme (bzw. der maximalen Ordnung in τ) in den Charakteren korrespondiert. Daß man dies zunächst bei den $c_{p,1}(\mathfrak{g})$ Modellen und für Rang $r = 2$ sieht, liegt einfach daran, daß das minimale Modell (d.h. das Modell ohne Korrekturen) bei $c_{p,1}(\mathfrak{g})$ leer ist (da das konforme Grid leer ist).

Weiter habe ich in [3] die Verlinde-Formel zur Berechnung der Fusionsregeln auf den Fall logarithmischer CFTs verallgemeinern können. Wie schon erwähnt, müssen zum Teil $\log(q)$ Terme auftreten, damit die Charaktere unter der Aktion der Modulgruppe eine endlichdimensionale Darstellung formen. Üblicherweise interpretiert man in $\chi_{|h_i\rangle}(q) = q^{h-c/24}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n^{(h)} q^n$ die Koeffizienten $a_n^{(h)}$ als Dimension des Moduls $M_{|h\rangle}$ auf Level n. Da die logarithmischen Terme keine gute Entwicklung als Potenzreihe in q haben, entfällt diese Interpretation und dadurch die Möglichkeit, den logarithmischen Term eines Charakters eindeutig zu normieren (man wählt $a_0^{(h)}$ als die kleinste positive ganze Zahl, so daß $a_n^{(h)} \in \mathbb{Z}_+$ für alle n ist). Man schreibt daher $\chi_{|h\rangle}(q) = q^{h-c/24}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}(a_n^{(h)} + \alpha^{(h)}\log(q) b_n^{(h)}) q^n$ für einen logarithmischen Charakter und normiert die $b_n^{(h)}$ wie die $a_n^{(h)}$. Es bleibt ein beliebiger Vorfaktor $\alpha^{(h)}$.

Die S Matrix, die das Transformationsverhalten der Charaktere $\chi_{|h\rangle}(q)$ unter $S : \tau \mapsto -1/\tau$ angibt (wobei τ der modulare Parameter und $q = \exp(2\pi i\tau)$ ist), hängt somit von den $\alpha^{(h_i)}$ ab. Ich habe in [3] gezeigt, daß die Zustandssumme unabhängig von den $\alpha^{(h_i)}$ modulinvariant ist und es auch im Grenzfall, daß alle $\alpha^{(h_i)}$ gegen Null gehen, bleibt. Die S Matrix wird allerdings in diesem Limes singulär (denn dann formen die Charaktere keine geschlossene Darstellung der Modulgruppe mehr). Man erhält also die überraschende Tatsache, daß die volle Theorie (mit links- und rechtschiralem Anteil) modulinvariant ist, obwohl die chiralen Anteile allein nicht einmal eine Darstellung der Modulgruppe formen. Die Verlinde-Formel, formal auf die von den $\alpha^{(h_i)}$ abhängende Matrix $S(\alpha)$ angewandt, ergibt Fusionskoeffizienten

$$N_{ij}^{k}(\alpha) = \sum_r \frac{S_i^r(\alpha) S_j^r(\alpha)(S^{-1}(\alpha))_r^k}{S_0^r(\alpha)} \tag{7}$$

ebenfalls als (komplizierte) Funktionen in den $\alpha^{(h_i)}$. Ähnlich wie im Falle der Strukturkonstanten logarithmischer CFTs, die ich in [1] ausgerechnet habe, heben sich in den entscheidenden Ausdrücken alle Singularitäten im Limes $\alpha^{(h_i)} \to 0$ weg und man erhält gute, ganzzahlige Fusionskoeffizienten $N_{ij}^k(0)$. Die Fusionsalgebra, die man als Limes

$$N_{ij}^{k} = \lim_{\alpha\to 0} N_{ij}^{k}(\alpha) \tag{8}$$

erhält stimmt vollständig mit den Erwartungen überein, die man aus einem direktem Studium der Darstellungsstruktur erhält.

Eine (rein formale) Zerlegung der nicht vollständig reduziblen Darstellungen auf Charakterebene ergibt modifizierte Fusionsregeln, die mit den bekannten Belavin-Polyakov-Zamolodchikov Fusionsregeln für minimale Modelle übereinstimmen [BPZ], wenn man (formal) das Modell zu $3p, 3$ betrachtet. Dies läst sich verallgemeinern und führt zu einer großen

Klasse logarithmsicher CFTs, den sogenannten *augmentierten* minimalen Modellen, bei denen formal nicht teilerfremde $p = np', q = nq'$ auftreten. In diesem Sinne erweisen sich minimale Modelle als in der Tat minimal, nämlich mit der kleinst möglichen in sich schließenden Operatoralgebra, während ihre augmentierten Partner größere Operatoralgebren einschließlich logarithmischer Operatoren aufweisen. Höhere Werte $n > 3$, n ungerade$^{\diamond}$, gehören zu LCFTs mit höherer Entartung bzw. höherem maximalen Rang der Jordan-Zellen zu L_0. Die LCFTs zu $c_{p,1}(\mathfrak{g}) = c_{3p,3}(\mathfrak{g})$ sind ein Spezialfall, weil das zugehörige minimale Modell leer ist. Auch diese Resultate finden sich in [3], spielen aber auch in [7] eine Rolle.

Diese rein formale Zerlegung auf Charakterebene ist möglich, da bei LCFTs die Charaktere nicht mehr eindeutig proportional zu den Lösungen der modularen Differentialgleichung sind. Wie ich in [3] gezeigt habe, gibt es jedoch nur vier Linearkombinationen (d.h. vier Werte für die $\alpha^{(h_i)}$), für die man ganzzahlige Fusionsregeln bekommt, nämlich $\alpha \in \{0, 1, \sqrt{-3}, 3\}$. Ob es ein Zufall ist, oder einen tieferen Grund hat, daß diese Zahlen genau $\sqrt{3}$ mal diejenigen Dilaton-Kopplungen sind, für die exakte Lösungen vierdimensionaler extremaler schwarzer Löcher existieren, muß ich jedoch hier leider (noch) offenlassen.

Logarithmische CFT ist nunmehr als wohldefinierte Verallgemeinerung gewöhnlicher CFTs etabliert und hat gerade in letzter Zeit ein zunehmendes Interesse von verschiedenen Gruppen erfahren [log]. Anwendungen reichen von Festkörperphysik bis hin zu Stringtheorien. Letztere gibt auch den logarithmischen Termen in den Charakteren eine physikalische Bedeutung, da der Rückstoßeffekt der Streuung geschlossener String-Zustände an D-Membranen genau durch diese Terme berechnet werden kann. LCFT stellt bei Leibe kein Kuriosum mehr dar, sondern eine neue, sehr große Klasse von zweidimensionalen, exakt lösbaren Feldtheorien. Ich selbst habe in [2,4,5] drei aktuelle Anwendungen von LCFT angegeben.

Die Tatsache, daß L_0 nicht diagonalisierbar ist, hat noch weitere tiefgreifende Konsequenzen. Betrachtet man anstatt der Felder ihre Moden, bzw. den Hilbertraum der Zustände (versehen mit der Shapovalov-Form als norminduzierendes Skalarprodukt), so kann man jedes nicht-verschwindende Skalarprodukt über die Lie-Algebra der Moden auf einen polynomialen Ausdruck in L_0 und c reduzieren. (Im Falle erweiterter Symmetrie-Algebren können natürlich auch die Nullmoden der anderen Generatoren auftreten.) Es ist klar, daß Fragen wie die nach Nullvektoren durch nicht-diagonalisierbare Nullmoden andere Antworten erhalten. Es zeigt sich, daß die Existenz von Nullmoden in diesem Fall so sehr "erschwert" wird, daß man mit ihrer Hilfe gar LCFTs klassifizieren kann [7]. Damit meine ich das Folgende: Jede unzerlegbare Darstellung einer LCFT formt bezüglich der Nullmoden einen Jordan-Block. Jede unzerlegbare Darstellung enthält genau eine irreduzible Darstellung als Unterdarstellung, die sich bezüglich der Symmetrie-Algebra wie gewohnt verhält. Zustände aus diesem irreduziblen Untermodul weisen daher keine Besonderheiten auf, und können ganz normal auch Nullvektoren sein. Die zusätzlichen nicht-trivialen Einschränkungen betreffen Zustände aus dem unzerlegbaren Modul, die nicht nur im irreduziblen Untermodul enthalten sind. Interessanterweise existieren solche nicht-trivialen Jordan-Nullvektoren dann und nur dann, wenn die CFT auch tatsächlich logarithmisch ist.

$^{\diamond}$Gerade Werte für n führen zu supersymmetrischen Erweiterungen der CFTs, statt zu logarithmischen. Man kann dies im Lichte meiner weiter unten beschriebenen Arbeit [7] verstehen, da sich die Jordan-Zellen Struktur sehr elegant mit symmetrisierten Grassmann-Variablen beschreiben läßt. In diesem Sinne liegen LCFTs vom Range r genau zwischen $N{=}r-1$ und $N{=}r$ supersymmetrischen CFTs. In der Tat hat bereits Hubert Saleur für $c = -2$ eine versteckte Supersymmetrie nachgewiesen.

Aus meinen generellen Betrachtungen zu LCFTs folgt nun, daß im Prinzip jedes minimale Model zu einer affinen Lie-Algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ zu einer LCFT erweiterbar sein sollte. Leider ist dies explizit nicht sehr einfach zu überprüfen, da man sehr schnell so hohe Level für die Nullvektoren betrachten muß, daß die Computerkapazitäten dafür nicht mehr ausreichen. Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1$ und das "kleinste" minimale Modell $c_{2,3}(\mathfrak{g}) = 0$ jedoch konnte ich explizit die Existenz von Jordan-Nullvektoren nachweisen und damit meine generellen Resultate stützen.

Um effektiv mit LCFTs rechnen zu können, habe ich zunächst in [7] einen sehr knappen und eleganten Formalismus entwickelt, bei dem ein Vektor in einer Jordan-Zelle vom Range r als formale Reihe in einer nilpotenten Variable θ, $\theta^r = 0$, geschrieben wird. Solche Variablen und ihre Potenzen lassen sich leicht als der Unterring der vollständig symmetrischen Polynome im von $N-1$ Grassman-Variablen aufgespannten Polynomring darstellen. Explizite Rechnungen reduzieren sich damit auf einfache algebraische oder analytische Operationen auf Reihen in θ. Insbesondere lassen sich die Moden L_n des Virasoro-Feldes auch im Falle nicht-trivialer Jordan-Zellen als linearer Differentialoperator schreiben, die jetzt zusätzlich auch auf θ wirken. Ein beliebiger Zustand in einer Rang r Jordan-Zelle ist eine Linearkombination

$$|h;\mathbf{a}\rangle = \sum_{n=0}^{r-1} a_n|h;n\rangle \equiv |h;a(\theta)\rangle = \sum_n a_n \frac{\theta^n}{n!}|h\rangle\,, \tag{9}$$

so daß z.B. die Aktion von L_0 durch

$$L_0|h;a(\theta)\rangle = \left(h + \frac{\partial}{\partial\theta}\right)|h;a(\theta)\rangle \tag{10}$$

gegeben ist. Da nach Voraussetzung alle eine Jordan-Zelle aufspannende Zustände durch die Moden L_n, $n < 0$, annihiliert werden, so daß die Jordan-Zelle die naheliegende Verallgemeinerung einer irreduziblen Höchstgewichtsdarstellung auf den Fall nicht vollständig reduzibler Höchstgewichtsdarstellungen ist, genügt es für das Weitere völlig, die Aktion von L_0 zu kennen. Das liegt an der oben erwähnten Tatsache, daß jede Shapovalov-Form mit Hilfe des "Durchkommutierens" von Virasoro-Moden in eine Form gebracht werden kann, in der nur noch L_0 und die zentrale Ladung c auftreten. Man braucht dann nur am Ende L_0 durch $(h + \partial_\theta)$ zu ersetzen. Eine beliebige Funktion in L_0 und c wirkt dann wie folgt auf einen Jordan-Zellen Höchstgewichtszustand:

$$f(L_0,c)\left|h;\sum_n a_n\frac{\theta^n}{n!}\right\rangle = \left|h;\sum_n\sum_k \frac{a_{n+k}}{k!}\frac{\partial^k}{\partial h^k}f(h,c)\frac{\theta^n}{n!}\right\rangle\,. \tag{11}$$

Man beachte, daß sich die formale Ableitung nach θ durch eine Ableitung der resultierenden Funktion $f(h,c)$, wie sie bei irreduziblen Höchstgewichtsdarstellungen auftritt, nach dem Höchstgewicht h ersetzt.

Damit kann ein Formalismus eingeführt werden, mit dem auf natürliche und einfache Weise Berechnungen von Shapovalov-Formen durchzuführen sind. Der Formalismus läßt sich leicht algorithmisieren und daher gut in den modernen algebraisch-symbolischen Programmiersprachen auf dem Computer implementieren. Bezeichnet man die Funktion $f(L_0,c)$, die man erhält, wenn man die Shapovalov-Form für ein Monom $\langle h;a'(\theta')|L_{n'_1}L_{n'_2}L_{n'_3}\ldots L_{-n_2}L_{n_1}|h;a(\theta)\rangle$ in den Virasoro-Moden berechnet, mit $f_{\mathbf{n}',\mathbf{n}}(L_0,c)$, so ist die entscheidende Bedingung für die Existenz eines logarithmischen Nullvektores $|\psi(\theta)\rangle = \sum_{|\mathbf{n}|=n} L_{-\mathbf{n}} b^{\mathbf{n}}(\theta)|h\rangle$ auf Level n, daß

$$\sum_{|\mathbf{n}|=n} b_k^{\mathbf{n}}(h,c) \frac{\partial^{r-k-1}}{\partial h^{r-k-1}} f_{\mathbf{n}',\mathbf{n}}(h,c) = 0 \quad \forall \mathbf{n}' : |\mathbf{n}'| = n\,. \tag{12}$$

Hier bezeichnen die $b_k^{\mathbf{n}}$ die Koeffizienten der Entwicklung in θ von $b^{\mathbf{n}}(\theta)$, und es ist bereits angedeutet, daß diese Koeffizienten als Funktionen in h und c durch die obigen Bedingungen bestimmt werden. Die $b_0^{\mathbf{n}}$ sind natürlich mit den Koeffizienten gewöhnlicher Nullvektoren identisch. Man hat also im Falle einer LCFT vom Range r genau r mal so viele Bedingungen an einen generischen$^{\diamond *}$ Nullvektor, wie bei gewöhnlichen CFTs.

Nachdem ich in [7] einen leistungsfähigen Formalisus für *allgemeine* LCFTs von beliebigem Range$^{\diamond **}$ r bereitgestellt habe, habe ich systematisch Nullvektoren konstruiert und auf diese Weise eine vollständige Klassifikation aller LCFTs mit $c \leq 1$ erzielt. Weiterhin konnte ich auch alle LCFTs mit $c \geq 25$ angeben, die sich aus der Liouville-Theorie mit einem Feld-Freiheitsgrad konstruieren lassen. Weiter konnte ich das von mir eingeführte Konzept der "augmentierten" CFTs vertiefen und erstmals durch explizite Konstruktion untermauern. Ich habe meine Arbeit [7] mit einer Betrachtung der (h,c)-Ebene beschloßen, in der für jedes minimale $\hat{\mathfrak{a}}_1$-Model $c_{p,q}$ gegen alle $h_{r,s}(c_{p,q})$ des konformen Grids aufgetragen wird. Gerade in dieser Darstellung von (einem Teil von) $\mathcal{M}(d{=}2, N{=}0, c \leq 1)$ kann man besonders schön sehen, daß die LCFTs den Abschluß bilden, da ihre Spektren genau die "weißen" Flecken füllen. Man erkennt auch, daß die LCFT Spektren aus denen der minimalen Modelle durch das Zusammenlaufen verschiedener h-Werte hervorgehen.

Mit dieser Arbeit habe ich somit viele der abstrakten Ergebnisse über LCFTs konkret machen können. Ich hoffe, nachdem ich erfolgreich LCFTs als wichtige und anwendungsträchtige Klasse von CFTs etabliert habe, damit auch einen Beitrag zu ihrer expliziten Handhabung geleistet zu haben, der ihre tieferes Verständnis und ihre Nutzung sehr erleichtern sollte.

· ◇ · B · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · (0,2) Supersymmetrische Modelle · ◇ ·

Eine der stärksten Motivationen für eine genaue Klassifikation von CFTs ist die Stringtheorie. Schon früh erkannte man, daß supersymmetrische Stringtheorien eher geeignet sind, eines Tages die "Große Vereinheitlichte Theorie" zu formulieren. Wie schon angedeutet, bringt dies jedoch das Problem mit sich, daß man im allgemeinen mehr Supersymmetrie einbaut, als phänomenologisch vertretbar ist.

Es war daher ein großer Fortschritt, als phänomenologisch interessante "nur noch" (0,2) supersymmetrische Weltflächen-CFTs konstruiert werden konnten, so daß die heterotischen Stringtheorien konsistente und realistische Kompaktifizierungen haben [02mod]. Obwohl spezielle, elliptisch gefaserte (0,2) Modelle in vier und sechs Dimensionen in heterotischen String-Dualitäten und in F-Theorie$^{\diamond ***}$ auftreten, und daher von stark zunehmendem Interesse sind,

$^{\diamond *}$Mit generisch ist hier ein Nullvektor gemeint, für den $\partial_\theta|\psi(\theta)\rangle \neq 0$ gilt, der also als Reihe in θ betrachtet nicht nur aus dem konstanten Glied besteht und damit nur ein gewöhnlicher Nullvektor wäre.

$^{\diamond **}$Wie sich leicht in meinem Formalismus zeigen läßt, ist der Rang einer LCFT durch den Rang der Jordan-Zelle der Vakuumdarstellung bereits eindeutig festgelegt.

$^{\diamond ***}$Eine 12-dimensionale neue Theorie, in der alle bekannten Stringtheorien als Grenzfälle so enthalten sind, daß sämtliche in jüngster Zeit entdeckten und/oder bewiesenen String-Dualitäten aus dieser 12-dimensionalen Theorie in einfacher und natürlicher Weise abzuleiten sind [F&Dual].

ist unser Wissen um diese Modelle sehr gering, vor allem verglichen zu unserem Wissen über die Untermenge der (2,2) Modelle. Insbesondere ist fast nichts über die Struktur der Modulräume von (0,2) Modellen bekannt. Im (2,2) Fall ist es aufgrund der beidseitigen Supersymmetrie möglich, mit Hilfe von Mirror-Symmetrie und Nicht-Renormierungs-Theoremen für Kopplungen im Superpotential exakte Beschreibungen der Räume sowohl der komplexen wie der Kähler Moduli zu gewinnen.

Im (0,2) Fall hat man weder die linkslaufende Weltflächen N=2 Supersymmetrie, um die Exaktheit bestimmter Yukawa-Kopplungen sicherstellen zu können (bei großem Kompaktifizierungsradius), noch hat man eine algebraische Möglichkeit zwischen komplexen, Kähler und Bündel Moduli zu unterscheiden (bei kleinem Radius). Ich habe mich daher zusammen mit Ralph Blumenhagen, einem Experten für (0,2) Modelle, in [6] der Erforschung der (0,2) Modulräume zugewandt. Dabei konzentrierten wir uns vor allem auf die noch kaum betrachteten (0,2) Orbifold Konstruktionen, die man am besten in ihrer Landau-Ginzburg Phase untersuchen kann.

Ein (0,2) Modell – wir beschränken uns auf solche, die lineare σ-Modelle darstellen – besitzt sowohl N chirale Superfelder Φ_i als auch $M = N_a + N_j$ Fermi-Superfelder Λ^a. Die entscheidende Größe ist das Superpotential

$$W = \Lambda^a F_a(\Phi_i) + \Lambda^{N_a+j} W_j(\Phi_i)\,, \tag{13}$$

wobei die W_j und F_a quasihomogene Polynome sind. Für großen Radius beschreiben die W_j Hyperflächen in einem gewichtet Projektiven Raum $\mathbb{P}_{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N}[d_1, d_2, \ldots d_{N_j}]$, während die F_a ein Vektorbündel $V(n_1, n_2, \ldots, n_{N_a}; m)$ auf diesem Raum definieren. Aus der Quasihomogenität folgt die Existenz einer rechtslaufenden R-Symmetrie und einer linkslaufenden $U(1)_L$ Symmetrie mit zugehörigen Strömen, bezüglich derer Ladungen für die Felder definiert werden können. Man weist weiter den Feldern Ladungen bezüglich der diskreten $\mathbb{Z}_{h_i}$ Symmetrien, $i = 1, \ldots, P-1$, zu. Man beachte, daß die übliche GSO-Projektion bereits eine Orbifold Konstruktion mit $\mathbb{Z}_{h_0} = \mathbb{Z}_m$ als diskreter Symmetrie ist, und daß die Randbedingungen bezüglich jeder dieser P diskreten Ladungen getwistet sein können. Der elliptische Genus ist dann im Wesentlichen eine Summe von Orbifold-Zustandssummen über alle getwisteten Sektoren $\vec{\alpha}$. Uns interessiert nur der masselose Anteil des Spektrums, den man auch χ_y-Genus nennt. Mit der Abkürzung $\{x\} = x - [x]$ ist für einen gegebenen Twistsektor $\chi_y^{\vec{\alpha}}$ bestimmt durch die Funktion

$$f^{\vec{\alpha}}(\vec{z}) = (-1)^{\vec{w}\vec{\alpha}} e^{2\pi i \vec{z}\vec{Q}_{\vec{\alpha}}} q^{E_{\vec{\alpha}}} \frac{\prod_a (-1)^{[\vec{\alpha}\vec{q}_a]} (1 - e^{2\pi i \vec{z}\vec{q}_a} q^{\{\vec{\alpha}\vec{q}_a\}})(1 - e^{-2\pi i \vec{z}\vec{q}_a} q^{1-\{\vec{\alpha}\vec{q}_a\}})}{\prod_i (-1)^{[\vec{\alpha}\vec{q}_i]} (1 - e^{2\pi i \vec{z}\vec{q}_i} q^{\{\vec{\alpha}\vec{q}_i\}})(1 - e^{-2\pi i \vec{z}\vec{q}_i} q^{1-\{\vec{\alpha}\vec{q}_i\}})}\,, \tag{14}$$

wenn in deren q-Entwicklung nur Terme der Form $q^0 e^{-2\pi i \vec{z}(\vec{\sigma}+\vec{n})}$ berücksichtigt werden, wobei $\vec{n} \in \mathbb{Z}^P$ und σ durch die Anomaliebedingungen bestimmt ist (die zusätzlichen Variablen $z_1, \ldots, z_{P-1}$ werden am Schluß auf Null gesetzt). Weiter sind die fraktionalen Anteile der Ladungen und der Energie in $\vec{Q}_{\vec{\alpha}}$ und $E_{\vec{\alpha}}$ zusammengefaßt, die ich hier nicht weiter angeben möchte. Mit dieser Verallgemeinerung des elliptischen Genus (der widerum eine Verallgemeinerung der Zustandssumme für den Fall von $N \geq 2$ Supersymmetrie darstellt) haben wir explizit in verschiedenen Modellen nach Mirror-Paaren von Orbifolds gesucht. Zunächst wiesen wir nach, daß – im Gegensatz zu (2,2) Modellen – zu jedem (0,2) Modell *unendlich* viele Orbifold Konstruktionen möglich sind, da das (0,2) Superpotential unendlich viele diskrete Symmetrien (modulo der Anomaliebedingungen) besitzt.

Unsere Resultate haben eine Vielzahl von Konsequenzen für unser Verständnis der Geometrie der (0,2) Modelle. Schon allein am detaillierten Studium eines klassischen Beispiels, des (0,2) Bruders der (2,2) Quintic, läßt sich ablesen, daß bei (0,2) Modellen das Herausteilen nur einer einzigen Symmetrie bereits den ganzen Raum der möglichen Orbifolds aufzuspannen vermag. Dies liegt an der unendlichen Vielzahl möglicher diskreter Symmetrien, so daß sich das Herausteilen mehrerer diskreter Symmetrien, z.B. $\mathbb{Z}_{h_1} \times \mathbb{Z}_{h_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{h_P}$ durch eine geeignet gewählte einzelne Symmetrie der Gestalt $\mathbb{Z}_{h_1 h_2 \ldots h_P}$ ersetzen läßt[*△]. Weiter konnten wir zeigen, daß die Menge aller möglichen Orbifolds (nahezu) mirror-symmetrisch ist, d.h. daß der Plot der Spektren (Generationen) $N_{16} + \bar{N}_{16}$ gegen $N_{16} - \bar{N}_{16}$ spiegelsymmetrisch ist. Das bleibt auch dann wahr, wenn das (0,2) Modell keinen (2,2) Bruder hat – eine wirklich überraschende Tatsache, die darauf hinweist, daß Mirror-Symmetrie viel grundlegender ist als bisher angenommen, und unabhängig von (voller) Supersymmetrie existiert. Mirror-Symmetrie existiert dabei separat sowohl für die (übliche) Eichgruppe $SO(10)$, als auch für Eichgruppe E_6, die als Erweiterung von ersterer bei der Existenz von Extra-Gauginos hervorgeht[△] Ferner konnten wir für diejenigen (0,2) Modelle, die einen (2,2) Bruder ihr Eigen nennen können, die sogenannte "Simple Current" Konstruktion als nichts anderes als eine einfache $\mathbb{Z}_2$ Orbifold Konstruktion realisieren. Sei ein (2,2) Modell als Hyperfläche in einem gewichtet projektiven Raum $\mathbb{P}_{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N}[d]$ gegeben, und sei ferner z.B. $d/\omega_1 = 2l+1$ ungerade. Der Simple Current ist einfach eine Symmetrie, die direkt auf der CFT Zustandssumme operiert, und die als chirales lokales Feld in der CFT zu deren Symmetrie-Algebra hinzugenommen werden kann. Die CFTs von (2,2) Modellen sind gegeben als Tensorprodukte von Gepner-Modellen, und in der üblichen Notation der Quantenzahlen ist der Simple Current das Feld $(0\ 2l{+}1\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0)$. Um diesen als (0,2) Orbifold zu realisieren, transformiert man das (2,2) Modell in ein triviales (0,2) Modell $V(\omega_1,\ldots,\omega_N;d) \longrightarrow \mathbb{P}_{\omega_1,\ldots,\omega_N}[d]$ und verwendet die $\mathbb{Z}_2$ Symmetrie

$$J = \left(\frac{2l+1}{2}, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, \frac{2l-3}{2}\right), \tag{15}$$

um zum bei Leibe nicht mehr trivialen (0,2) Modell

$$V(\omega_1,\ldots,\omega_N;d) \longrightarrow \mathbb{P}_{2\omega_1, l\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_N}[(l+2)\omega_1, 2l\omega_1] \tag{16}$$

zu gelangen. Das ergibt eine sehr einfache und elegante Methode, unzählige konsistente (0,2) Modelle als Orbifold-Descendants von (2,2) Modellen zu konstruieren.

Schließlich diskutierten wir die Konsequenzen von (0,2) Mirror-Symmetrie, mit deren Hilfe sich gewisse Yukawa-Kopplungen der Form $\langle 10, \bar{16}, \bar{16}\rangle$ berechnen lassen (für $SO(10)$ als Eichgruppe). Da die entsprechenden Kopplungen im ungetwisteten Sektor die Struktur eines chiralen Ringes besitzen, hat man sehr strenge Auswahlregeln dafür, daß sie nicht identisch verschwinden. Mirror-Symmetrie erlaubt es nun, auch für die getwisteten Sektoren einen chiralen Ring zu definieren. Hat man ferner für das originale Model eine explizite CFT Beschreibung, kann man die ungetwisteten Kopplungen exakt ausrechnen und somit die getwisteten Kopplungen für das Mirror-Modell. Da man schon seit Längerem weiß, daß

[*△] Oft reicht sogar eine wesentlich kleinere Symmetrie $\mathbb{Z}_H$, H ein echter Teiler von $h_1 h_2 \ldots h_P$, aus.

[△] Andere Erweiterungen, wie zum Beispiel auf $SO(12)$ treten nur sehr sporadisch auf, so daß Aussagen über den Grad an Mirror-Symmetrie mangels Daten nicht sinnvoll zu machen sind. Für E_6 sind die korrekten Spektren N_{27} und $\bar{N}_{27}$, für $SO(12)$ entsprechend N_{32} und $\bar{N}_{32}$ etc.

sich im Raum-Zeit Superpotential von (0,2) Modellen unerwarteter Weise bestimmte Terme wegheben, und daher in linearen σ-Modellen *alle* Parameter gute Moduli darstellen, hoffen wir in weiteren Arbeiten stärkere Aussagen zu Yukawa-Kopplungen machen zu können.

$\cdot\diamond\cdot$ III $\cdot\diamond\cdot$
 Anwendungen
 oder
 Der Nutzen von Klassifikationen

Man mag sich vielleicht fragen, worin denn der Nutzen von Klassifikationen, wie ich sie in [1,3,6,7] und auch schon früher in [Flo1-Flo3] vorgenommen habe, liegen kann. Als Physiker ist die rein mathematische Frage nach der Charakterisierung aller Lösungen eines (mathematischen) Problemes nicht hinreichend. Für mich persönlich hat dies zur Folge, daß ich mich immer auch versucht sehe, direkt Anwendugen für klassifikationsartige Ergebnisse zu finden. Die Untersuchung des Modulraumes der (0,2)-Orbifold Modelle in [6] rechtfertigt sich direkt aus der grundlegenderen Fragestellung nach den möglichen String-Vakua, von deren Kenntniss man sich – eines Tage – erhofft, eine abschließende, phänomenologisch korrekte, Stringtheorie konstruieren zu können. Diese grundliegende Frage hat auch früher sehr viel Forschung auf dem Gebiet der CFTs motiviert, doch auch gleichzeitig oft verhindert, daß man ernsthaft solche CFTs untersucht hat, die mit Sicherheit (wie man dachte) keine Relevanz für die Stringtheorie besitzen. Das trifft insbesondere für nicht-unitäre CFTs zu. Ich möchte daher in diesem Kapitel beschreiben, wie konkrete physikalische Fragestellungen gerade deshalb beantwortet werden können, weil für bestimmte Klassen von CFTs vollständige Klassifikationen bekannt sind.

$\cdot\diamond\cdot$ A $\cdot\diamond\cdot\diamond\cdot\diamond\cdot\diamond\cdot\diamond\cdot\diamond\cdot\diamond\cdot\diamond\cdot$ Der fraktionale Quanten-Hall-Effekt $\cdot\diamond\cdot$

Meine Arbeit [2] befaßt sich mit den möglichen Übergängen zwischen zwei Plateaux im fraktionalen Quanten Hall Effekt (FQHE) [KLZ,Lut,Sto]. Ich habe Tensorprodukte bestimmter RCFTs konstruiert, die allen dabei auftretenden Effekten Rechnung tragen: zum einen können (im Bild von J.K. Jain [Jai]) Flußquanten an die Elektronen (oder zusammengesetzten Fermionen) angeheftet werden, zum anderen kommt es zu Wechselwirkungen mit den in der Probe vorhandenen Unordnungsstellen, zum dritten zu einer Vermischung zweier unterschiedlicher Quantenfluide. Letzteres Phänomen entsteht, weil nicht alle Fermionen zur gleichen Zeit ihre zusätzlichen Flußquanten angeheftet bekommen können und eine Koexistenz zweier Quantenfluide ohne Vermischung so lange möglich ist, wie die Konzentration des Minoritätsfluides klein genug ist, um durch Lokalisierung ohne Effekt auf den Quanten-Hall Zustand zu bleiben.

Schon 1990 hat man Laughlin's so erfolgreiche Wellenfunktionen für die Filling-Faktoren $\nu = 1/(2p+1)$ als Korrelationsfunktionen von $c = 1$ Gauss-Modellen geschrieben. Auch die Anregungen dieser FQH-Zustände durch Quasilöcher läßt sich auf elegante Weise im Rahmen dieser $c = 1$ CFTs angeben und sofort die anyonische Statistik der Quasilöcher ableiten. Die Anregungen, derer $2p+1$ Stück zusammengenommen sich wie ein Elektron verhalten, implementieren Laughlin's Eichprinzip, was durch die Fusionsalgebra des "rationalen Torus" dieser $c = 1$ CFTs mit Kompaktifizierungsradius $R = \sqrt{2p+1}$ genau reproduziert wird.

Weiter kann man erfolgreich Laughlin's Quantenfluid in seiner Eigenschaft der Inkompressibilität durch die Symmetrie-Algebra der flächenerhaltenden Diffeomorphismen, der $\mathcal{W}_{1+\infty}$, beschreiben, was eine indirekte Bestätigung von Jain's Bild der zusammengesetzten Fermionen liefert – wie ich zusammen mit Raimund Varnhagen in [FlVa] gezeigt habe. Trotzdem läßt sich jedoch genau dies, das Anheften von Flußquanten an ein Elektron, bis jetzt nicht im Rahmen des ansonsten so eleganten CFT-Bildes durchführen.

Das Anheften von Flußquanten kann aber doch mit speziellen RCFTs beschrieben werden, die zwei vertwistete Sektoren unterschiedlicher anyonischer Statistik besitzen. Solche RCFTs existieren nur unter ganz bestimmten Umständen, die sehr eng mit den Eigenschaften der Modulgruppe zusammenhängen. Ich habe sie in [Flo2] konstruiert und klassifiziert und ihre mögliche Anwendung auf zweidimensionale Systeme mit anyonischer Statistik in [Flo4] beschrieben. Diese Theorien haben $c_{\mathrm{eff}} = 1$ und können mit vier ganzen Zahlen parametriesiert werden, notiert $\mathfrak{C}\left[\begin{smallmatrix} p & p' \\ q' & q \end{smallmatrix}\right]$. Sie beschreiben einen Übergang zwischen zwei verschiedenen, chiralen $c = 1$ Modellen, bestimmt durch die Fusionsalgebra. Diese kommt ins Spiel, weil das Anheften der Flußquanten durch das Fusionsprodukt geeigneter primärer Felder für Elektronen und Flußquanten gegeben ist. Genau zweimaliges Anwenden des Fusionsproduktes eines Flußquants $\Phi_{1/2p+1}$ auf ein mit $2p$ Flußquanten versehenes Elektron Φ_{2p+1} liefert einen Zustand mit anyonischer Statistik $1/2p+3$, was einer Anregung eines Zustandes aus mit $2(p+1)$ Flußquanten versehenen Elektronen entspricht, also $[\Phi_{2p+1}] \times [\Phi_{1/2p+1}] \times [\Phi_{1/2p+1}] = [\Phi_{n/2p+3}]$.

Es ist hier wichtig zu bemerken, daß die Standardkonstruktion von Laughlin's Wellenfunktionen aus CFTs einfach von unitären CFTs ausgeht. Läßt man diese Voraussetzung fallen, so legt die Monodromie der Felder, die Elektronen und Flußquanten repräsentiern, im unendlich fernen Punkt die (nun nicht mehr notwendig verschwindende) Hintergrundsladung auf $\alpha_0 = n\sqrt{(2p+1)/2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, fest. Damit befindet man sich aber in einer Klasse von CFTs, die vollständig klassifiziert ist, denn $c = 1 - 24\alpha_0^2$.

Die spezielle Struktur des Modulraumes dieser RCFTs [Flo2] hat zur Folge, daß die möglichen Übergänge algebraisch durch die Operation von $\Gamma_T \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ auf dem Modulraum gegeben sind. Es wurde schon früher vermutet, daß die grobe Struktur des Phasendiagramms vollständig durch die Aktion der Untergruppe $\Gamma_2 \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ der Modulgruppe bestimmt ist [KLZ,Lut], was aber im Prinzip zu viele FQHE Zustände ermöglicht. Dies ist ein notorisches Problem theoretischer Arbeiten über den FQHE: Entweder erklären sie nur eine kleine Teilmenge der beobachteten Filling-Faktoren, oder sie sagen viel zu viele nicht beobachtete voraus.

Die anderen oben genannten Effekte jedoch können nicht allein mit diesen Theorien beschrieben werden. Unordnungseffekte werden üblicherweise mit nicht-unitären $c = 0$ Theorien beschrieben [Ber,Zir]. Erfüllt die statistische Verteilung der Unordnung bestimmte Voraussetzungen, faktorisieren die Korrelationsfunktionen eines Systems mit Unordnung in einen ungestörten Anteil und einen freien Anteil für die Unordnung. Letzterer verursacht eine Verschiebung des Spektrums des ungestörten Systems proportional zur Kopplungstärke σ der Unordnung, $h_\lambda^{\mathrm{disorder}} = h_\lambda^{\mathrm{pure}} - \sigma f(\lambda)$ mit eindeutig bestimmter Funktion $f(\lambda)$ [Ber].

Das Vermischen zweier Quantenfluide jedoch ist ein (magneto-) hydrodynamischer Vorgang und, aufgrund der experimentell beobachteten scharfen Natur des Phasenübergangs zwischen zwei FQHE Plateaux, vermutlich turbulent. Um einen Phasenübergang zu bekommen, der durch die in der Probe vorhandene Unordnung und durch daran möglicher Lokalisierung betrieben wird, müssen die Spektren der Feldtheorien, die die einzelnen FQHE Zustände beschreiben, zur Übereinstimmung kommen. Solche zweidimensionalen Feldtheorien habe ich nun in [2] konstruiert, wobei als entscheidender Anteil LCFTs mit $c = -24$ und $c = 0$ auftreten. Wie ich später in [4] gezeigt habe, beschreibt die rationale LCFT mit $c = c_{6,1}(\mathfrak{a}_1) = -24$ zweidimensionale (chirale) Turbulenz.

Die vollständige Theorie zur Beschreibung von FQHE Übergängen umfaßt einen Anteil, der die anyonische Statistik der zusammengesetzten Fermionen im tiefsten Landau Level angibt, einen Anteil für Unordnungseffekte, der im wesentlichen einen Shift im Spektrum verursacht und einen Anteil zur Modellierung der Hydrodynamik der Quantenflüssigkeit. Solange man sich auf einem Plateau befindet, spielt nur der erste Anteil eine Rolle und liefert die Wellenfunktion projiziert auf den tiefsten Landau Level. Die anderen Anteile treten erst am Phasenübergang in Erscheinung und modifizieren das Spektrum der Theorie derart, daß es mit dem Spektrum der Theorie für das "nächste" Plateau zur Deckung kommt. Der hinzutretende LCFT-Teil liefert auch das Feld mit Skalendimension $\frac{7}{3}$, dem experimentell beobachteten, universellen, kritischen Exponenten der Phasenübergänge. Beispielsweise wird das Anheften zweier Flußquanten pro Elektron für Laughlin-Zustände mit Filling-Faktor $\nu = 1/(2p+1) \mapsto \nu = 1/(2p+3)$ durch folgende "Gleichung" zwischen Tensorprodukten von RCFTs beschrieben:

$$F: \ \mathfrak{C}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2p+1 & 2p+3 \end{bmatrix} \otimes \mathfrak{C}[c_{6,1}] \mapsto \mathfrak{C}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2p+3 & 2p+5 \end{bmatrix} \otimes \mathfrak{C}[c_{3,2}]\,, \tag{17}$$

wobei die Spektren von linker und rechter Seite gleich werden, wenn die Stärke der Unordnung einen kritischen Wert σ_0 übersteigt. Übergänge zwischen Zuständen in höheren Landau-Leveln werden durch mehrfache Tensorprodukte beschrieben, wobei auftretende $\hat{\mathfrak{u}}(1)$ Faktoren ausprojiziert werden (was effektiv einer Projektion der FQHE Zustandes auf den tiefsten Landau-Level gleichkommt).

Man sollte zunächst annehmen, daß der Term "nächstes" Plateau nicht genau definiert ist. Ein Resultat meiner Arbeit [2] ist jedoch, daß nur bestimmte Übergänge möglich sind, und die Übergänge in Abhängigkeit von den experimentellen Voraussetzungen von Temperatur und äußerem Magnetfeld eindeutig sind. Es ist gerade das Zusammenspiel der verschiedenen miteinander tensorierten CFTs, das zusätzliche Bedingungen liefert und dadurch die Zahl der möglichen Übergänge drastisch einschränkt. Sind beispielsweise zwei FQHE Zustände mit $\nu = n_e/(2p_f+1)$, $\nu' = n'_e/(2p'_f+1)$ koexistente Quantenfluide, so gibt es einen Übergang zu $\nu^* = (n_e+n'_e)/(2p_f+2p'_f+1)$ nur dann, wenn $p_f n'_e = p'_f n_e$. Die entsprechende "Gleichung" zwischen Tensorprodukten von RCFTs lautet hier

$$T: \ F^{p'_f n_e}\mathfrak{C}_{\nu=\frac{n_e}{2p_f+1}} \otimes F^{p_f n'_e}\mathfrak{C}_{\nu'=\frac{n'_e}{2p'_f+1}} \overset{\text{joining}}{\longmapsto} F^{p_f n'_e + p'_f n_e}(\mathfrak{C}_{\nu=\frac{n_e}{2p_f+1}} \hat{\otimes} \mathfrak{C}_{\nu'=\frac{n'_e}{2p'_f+1}}) \overset{\text{resizing}}{\longmapsto} \mathfrak{C}_{\nu^*=\frac{n_e+n'_e}{2p_f+2p'_f+1}}\,, \tag{18}$$

wobei hier $\hat{\otimes}$ das Tensorprodukt mit anschließendem ausdividieren der $\hat{\mathfrak{u}}(1)$-Anteile meint und die angehefteten Flußquanten (und deren Wechselwirkung) direkt in Form der F-Abbildung geschrieben wurden. Die beiden Abbildungen F und T implementieren genau die $\Gamma_T(2)$ Aktion auf dem Filling-Faktor ν, der durch die RCFTs wie oben beschrieben bestimmt ist. Weiter gibt es nur noch einige exzeptionelle Fälle für T, die auf Teilbarkeitseigenschaften kleiner Zahlen beruhen. Ich habe sie in [2] behandelt und ihre Vollständigkeit bewiesen. Dabei war die genaue und vollständige Kenntniss der hier auftretenden Klassen von (L)CFTs eine wesentliche Voraussetzung.

Die Logik ist in diesem Fall die Folgende: Prinzipielle Überlegungen gestatten es, die CFT Kandidaten auf bestimmte Klassen von CFTs zu beschränken (hier: die CFT muß im Spektrum Elektronen und Quasilöcher alias Flußquanten enthalten, die im Unendlichen triviale Monodromie besitzen müssen). Nachdem die unitären Lösungen ausscheiden, da sie nur Quasilochanregungen, aber nicht Jain's Bild der zusammengesetzten Fermionen umfassen, verbleibt nur eine weitere mögliche Serie von CFTs. Da ihr Modulraum vollständig klassifiziert ist, ist man in der Lage, die Vollständigkeit der durch diese CFTs darstellbaren FQH-Zustände zu beweisen.

Alle beobachteten FQHE Zustände werden durch mein Modell erklärt, und es werden insbesondere keine weiteren, nicht beobachteten Zustände erhalten. Die Konstruktion in [2] ist zwar recht abstrakt, aber mir ist keine andere Arbeit bekannt, die nicht entweder nur eine Teilmenge der beobachteten FQHE Zustände erklärt, oder mehr Zustände vorhersagt als experimentell nachgewiesen sind. Da die Experimente inzwischen einen sehr beachtlichen Grad von Präzision und Reproduzierbarkeit erreicht haben und trotz gezielter Präparation der Proben seit einiger Zeit keine weiteren FQHE Zustände mehr entdeckt werden, liegt die Last hier bei der Theorie. Ich denke, daß meine Arbeit [2] dem Rechnung trägt.

Einschränkend muß allerdings bemerkt werden, daß die obige Arbeit [2] von vorneherein nur Filling-Faktoren mit ungeradem Nenner zum Ziel hatte. Den (wenigen) gemessen Filling-Faktoren mit geradem Nenner liegt ein ganz anderes physikalisches Prinzip zu Grunde, als das Konzept der fermionischen Quantenflüssigkeit a la Laughlin. Besonder prominent ist der sogenannte Haldane-Rezayi Zustand mit $\nu = 5/2$, der bis dato einer guten Erklärung harrt.

· ◇ · B · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · Der Haldane-Rezayi Quanten-Hall-Zustand · ◇ ·

Wie zu befürchten, habe ich mich (zusammen mit Vikor Gurarie und Chetan Nayak) auch dieses rätselhaften FQH-Zustandes angenommen. Im Jahre 1987 haben R.L. Willet et aliter diesen FQH-Zustand mit Filling-Faktor $\nu = \frac{5}{2}$ beobachtet, und kurz darauf haben F.D.M. Haldane und E.H. Rezayi eine Wellenfunktion als Variationsansatz vorgeschlagen, die – ähnlich zu Laughlin's Ansatz für Filling-Faktoren $\nu = \frac{1}{2p+1}$ – einen ebenfalls inkompressiblen Zustand von Elektronen beschreibt [HaRe]:

$$\Psi_{\rm HR} \;=\; \mathcal{A}\left(\frac{u_1v_2 - v_1u_2}{(z_1-z_2)^2}\;\;\frac{u_3v_4 - v_3u_4}{(z_3-z_4)^2}\;\;\ldots\right)\;\prod_{i>j}(z_i-z_j)^2\;\; e^{-\frac{1}{4\ell_0^2}\sum|z_i|^2}\,. \tag{19}$$

Hier bezeichnet $\mathcal{A}$ Antisymmetrisierung über alle möglichen Arten Elektronen auszutauschen, u_i, v_i Up- bzw. Down-Spin Zustände des i-ten Elektrons, und ℓ_0 die magnetische Länge△*. Obwohl dieser Vorschlag nun schon 10 Jahre alt ist, konnte er bis jetzt durch Experiment weder bestätigt noch widerlegt werden. Wir haben daher versucht, effektive Feldtheorien sowohl für den Bulk wie für den Rand eines Systems vorzuschlagen, das die obige Wellenfunktion als Grundzustand besitzt.

Unser "Glaube" an Laughlin's Wellenfunktionen stammt nicht allein von ihrem hohen Überlapp mit den (numerisch berechneten) Wellenfunktionen des exakten Grundzustandes (bei kleinen Teilchenzahlen). Ihr enormer Erfolg liegt vor allem an ihrer speziellen Eigenschaft der *topologischen Ordnung* [top], die aus sehr plausiblen Gründen viel robuster ist als alles spezifischen Details anderer Wellenfunktionsansätze. Die topologische Ordnung, die mit der fraktionalen Statistik der Quasiteilchen und mit off-diagonalen Long-Range Beiträgen

△*Genaugenommen ist dies eine Wellenfunktion für einen $\nu = \frac{1}{2}$ Zustand. Man nimmt aber einfach an, daß für $\nu = \frac{5}{2}$ die untersten beiden Landau-Level für beide Spinrichtungen völlig gefüllt sind, und somit das Analogon dieser Wellenfunktion im zweiten Landau-Level den $\nu = \frac{1}{2}$-Übertrag beschreibt.

bestimmter Ordnungsparameter in Beziehung steht, kann für Laughlin's Wellenfunktionen mit Hilfe der Plasma-Analogie gezeigt werden, die Rechnungen mit dieses Funktionen sehr vereinfacht. Sie ist in kompakter Form in der effektiven (abelschen) Chern-Simons Theorie des QHE enthalten, und es bleibt zu hoffen, daß die überraschendste und weitreichendste Vorhersage – die der fraktionalen Statistik – bald im Experiment ihre Bestätigung finden wird.

Die effektive Chern-Simons Theorie führt direkt zu einer CFT Beschreibung der Randanregungen, deren detaillierte Vorhersagen inzwischen experimentell alle bestätigt worden sind. Das Problem ist nun, daß es für den Haldane-Rezayi Zustand, wie auch für einige andere Wellenfunktionen zu Filling-Faktoren mit geradem Nenner (wie dem Pfaff-schen Zustand), keine Plasma-Analogie gibt. Daher ist weder die Chern-Simons Theorie für die Quasiteilchen Statistik, noch die CFT für die Randanregungen in diesen Fällen bekannt.

Der Zusammenhang zwischen Chern-Simons Theorie in $2+1$ Dimensionen und CFT ist allerdings zweifach: Zum einen liefert die Einschränkung auf den Rand automatisch eine $1+1$ dimensionale CFT, die der Randanregungen. Zum anderen kann man aber zahlreiche QHE-Wellenfunktionen im Bulk direkt als konforme Blöcke interpretieren. Dahinter steht die Tatsache, daß der Hilbertraum einer Chern-Simons Theorie mit Wilson-Linien identisch ist mit dem Raum der konformen Blöcke einer spezifisch assoziierten CFT. Eine Bulk-Wellenfunktion korrespondiert dann direkt zu einem Zustand in der Chern-Simons Theorie mit Wilson-Linien. Letztere werden gerade durch die primären Felder der CFT repräsentiert. Diese beiden CFT-Zugänge sind nicht unabhängig voneinander: Läßt man ein geschlossenes Stück des Randes zu einem Punkt zusammenschrumpfen, erhält man genau eine Wilson-Schleife. Für Details siehe [cs-cft]. Dreht man diese Argumentationskette um, kann man aus der Kenntniss einer CFT-Beschreibung die effektive Chern-Simons Theorie ableiten[△**].

Ausgehend von der Beobachtung, daß der Haldane-Rezayi Zustand als ein konformer Block der $c=-2$ CFT gegeben ist, haben wir nun unser Wissen um LCFTs im allgemeinen und $c=-2$ im speziellen darauf zur Anwendung gebracht. So konnten wir erstmal schlüssig zeigen, daß die Entartung des Grundzustandes bei Torusgeometrie in der Tat 10 ist. Diese Entartung ist auch physikalisch eine wichtige Größe, gibt sie doch die Anzahl der topologisch verschiedenen Quasilochanregungen an, d.h. die Anzahl der Anregungen mit inäquivalenten Zopfgruppeneigenschaften. Diese überraschend hohe Entartung kommt genau deshalb Zustande, weil die $c=-2$ CFT logarithmisch mit entartetem Vakuumzustand ist. Wir haben im Detail die Wellenfunktionen der Quasiteilchenanregungen konstruiert und die nicht-abelsche $SU(2)$ Statistik der Quasilöcher demonstriert.

Damit haben wir eine Bulk-CFT-Formulierung gefunden, die allen bekannten Phänomenen bei $\nu=\frac{5}{2}$ Rechnung trägt. Eine andere Frage ist, welche CFT die Randanregungen beschreibt. Dazu konstruiert man üblicherweise alle Nullenergie Wellenfunktionen im niedrigsten Landau-Level, die *exakte* Eigenzustände gewisser Modell-Hamiltonians sind. Diese Lösungen enumerieren genau die Zustände der Rand-CFT. Macht man einige milde Annahmen für ein einschliessendes Potential am Rand, bekommen diese Zustände eine nicht-verschwindende Energie, so daß man das Spektrum der Rand-CFT bestimmen kann. Diese

[△**] Es ist a priori natürlich nicht klar, ob die Argumentation umkehrbar ist. Für abelsche Statistik ist dies jedoch bewiessen worden, und für nicht-abelsche Statistik existieren Beispiele, für die die Umkehrung gilt, wie z.B. die $SO(2n)$ Statistik der Quasilöcher des Pfaff-schen Zustandes. Wenn dies auch allgemein wahr ist, impliziert dies, daß die konformen Blöcke eine bevorzugte Basis der QHE-Zustände darstellen, da sie die Quasiteilchen Statistik unmittelbar transparent machen.

Konstruktion funktioniert auch für den Pfaff-schen und den sogenannten (3,3,1) Zustand, wo man direkt die korrekte Rand-CFT erhält. Da die Rand-CFT unitär sein muß, kann es nicht die $c = -2$ Theorie sein. Abschätzen der zentralen Ladung weist auf eine $c = 1$ Theorie hin, was aber das Problem der $SU(2)$-Symmetrie aufwirft, die in den möglichen $c = 1$ CFTs (wie dem Dirac-Fermion) nicht manifest ist. Wir schlagen daher eine truncierte Version einer $c = 2$ Theorie aus zwei Dirac-Fermionen vor, die eine nicht-lokale $SU(2)$-Symmetrie enthält. Damit stellen wir zwei Fakten sicher: zum einen ist die Symmetrie nicht lokal, was sich mit der Tatsache deckt, daß die lokalen Spin-Dichten keine lokalen Kommutatoren miteinander haben, zum anderen besitzt diese CFT ein dem einfachen Dirac-Fermion vergleichbares Spektrum (bis auf gewisse totale Multiplizitäten), was wünschenswert ist, da Bulk- und Rand-CFT gleiche (oder zumindest proportionale) Zustandssummen haben sollten. Letzteres liegt am intrinsischen Zusammenhang der Bulk-Deformationen (durch Quasilöcher) einer inkompressiblen Flüssigkeit und den Randanregungen. Wir haben daher auch zum erstenmal in der Literatur den genauen Zusammenhang von Zustandssummen von LCFTs zu denen ihrer unitären Partner hergestellt und die dabei notwendig auftretenden Multiplizitäten erklärt. Das hat einige Konfusion in der Literatur beseitigt.

Die $c = -2$ Theorie kann elegant durch ein sogenanntes $\theta, \bar{\theta}$ System von zwei skalaren antikommutierenden Teilchen realisiert werden. Aus der Invarianz der CFT unter $SL(2,\mathbb{C})$ Transformationen von $\theta, \bar{\theta}$ folgt übrigens auch die $SU(2)$ Symmetrie. Zusammen mit dem immer auftretenden chiralen Boson ϕ mit Radius $\sqrt{2}$ für $\nu = \frac{1}{2}$ kann das Elektron im Haldane-Rezayi Zustand in der Form $\Psi^{\rm el} = \partial\theta e^{i\sqrt{2}\phi}u + \partial\bar{\theta}e^{i\sqrt{2}\phi}v$ geschrieben werden, was unmittelbar

$$\langle \Psi^{\rm el}\Psi^{\rm el}\ldots\Psi^{\rm el}\rangle = \langle \partial\theta\ldots\partial\theta\rangle \; \langle e^{i\sqrt{2}\phi}\ldots e^{i\sqrt{2}\phi}\rangle = {\rm Pf}\left(\frac{u_i v_j - v_i u_j}{(z_i - z_j)^2}\right)\prod_{i>j}(z_i - z_j)^2 \qquad (20)$$

ergibt. Die 10-fache Entartung des Grundzustandes resultiert aus einer (allerdings nicht trivialen) Kombination der 5 möglichen Darstellungen der $c = -2$ CFT mit den zwei Darstellungen der $R = \sqrt{2}, c = 1$ CFT. Da in der Literatur bis jetzt nie die logarithmische Natur der $c = -2$ CFT in Betracht gezogen wurde, wurde auch immer die fünfte Darstellung übersehen, die nur aufgrund der Existenz des logarithmischen Operators mit $h = 0$ auftritt. Wir konnten damit zum ersten Mal explizit alle 10 topologisch verschiedenen Bulk-Anregungen angeben. Ein kleines Zusatzresultat ist ein sehr einfaches Argument zum Abzählen der möglichen Quasiloch Zustände mit $2n$ Flußquanten. Die Fusionsregeln der $c = -2$ CFT liefern sofort, daß $2n$-Punkt Funktionen dieser Art genau 2^{2n-3} konforme Blöcke ergeben.

Wir haben damit erfolgreich CFT-Methoden auf einen bisher äußerst rätselhaften FQH-Zustand anwenden können und genau diejenigen Phänomene erklärt, die bisherigen Bemühungen immer widerstanden haben (insbesondere die 10-fache Entartung und die Äquivalenz der Bulk- und Randzustandssummen). Sollte sich denn in hoffentlich nicht allzu ferner Zukunft die anyonische Statistik der Quasilöcher im FQHE und auch das Auftreten nicht-abelscher Statistik in FQH-Zuständen wie dem Haldane-Rezayi Zustand experimentell nachweisen lassen, wird wohl CFT endlich den Platz in der Festkörperphysik erhalten, der ihr gebührt. Es ist bedauerlich, daß viele gute Arbeiten, die CFT auf Festkörperphysik (erfolgreich) anwenden, von der Merheit der Festkörperphysiker völlig ignoriert werden. Die moderneren Methoden der mathematischen Physik sind vielen Festkörperphysikern (vor allem in den USA) bis jetzt zu abstrakt und zu mathematisch. Daher wäre eine experimentelle Bestätigung von Vorhersagen, die ausschließlich über CFT-Methoden gemacht werden können, ein unschätzbarer Gewinn. Wir haben deshalb am Ende unserer Arbeit die experimentell zu erwartenden Konsequenzen unseres Modells genau angegeben, wie z.B. diverse Tunnelleitfähigkeiten eines Haldane-Rezayi FQH-Zustandes in Abhängigkeit von der Temperatur. Damit sind Experimente gemeint, bei denen ein solcher Zustand über einen Punktkontakt mit entweder einer Fermi-Flüssigkeit oder einem anderen Haldane-Rezayi Quantentropfen in Verbindung gebracht wird, oder wo der Tunnelstrom von Quasiteilchen von einem Rand zum anderen durch den Bulk eines solchen Zustandes gemessen wird. Natürlich sehen wir sehr zuversichtlich diesen und den anderen oben genannten Experimenten entgegen.

· ◇ · C · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ZWEI-DIMENSIONALE KONFORME TURBULENZ · ◇ ·

Ein anderes ungelöstes Problem, dem ich mich in [4] zuwandte, ist Turbulenz in zwei Dimensionen. Polyakov schlug 1992 vor [Pol], die Hopf-Gleichungen mit Methoden der konformen Feldtheorie exakt zu lösen. Dafür benötigt man eine RCFT, mit deren Feldern die fundamentalen Größen zweidimensionaler Turbulenz, Vortizität $\omega(x)$ und Strömungsfunktion $\psi(x)$, modelliert werden können. Der entscheidende Punkt ist, daß in den Hopf-Gleichungen (ohne Viskosität)

$$\sum_{k=1}^{n}\langle\omega(x_1)\ldots\dot{\omega}(x_k)\ldots\omega(x_n)\rangle = 0 \tag{21}$$

die zeitliche Ableitung durch die Navier-Stokes Gleichungen ausgedrückt,

$$\dot{\omega}(x) = -e_{\alpha\beta}\partial_\alpha\psi(x)\partial_\beta\Delta\psi(x)\,, \tag{22}$$

und der nicht-lineare Ausdruck auf der rechten Seite durch eine OPE ersetzt wird,

$$\psi(x)\psi(y) = |x-y|^{2(h(\phi)-2h(\psi))}(\phi(y) + \text{descendants})\,. \tag{23}$$

Im Falle nicht-unitärer Theorien ist der führende Term $\phi(y)$ nicht die Identität, sondern ein Feld negativer konformer Dimension. Dies ist auch zu erwarten, da Turbulenz sicher nicht durch Gibbs Zustände gegeben ist. Polyakov und zahlreiche Nachstreiter versuchten, mit Hilfe minimaler Modelle zu einer Lösung zu kommen. Zwei Tatsachen lassen dies jedoch als wenig überzeugend erscheinen: Zum ersten können minimale Modelle zweidimensionale Turbulenz nur im Ansatz richtig beschreiben, reproduzieren aber weder das phänomenologisch erwartete Energiespektrum [Kra], noch die unendliche Anzahl von Erhaltungsgrößen $H_n = \int \omega^n(x)\mathrm{d}x$. Zum zweiten erhält man unendlich viele solcher "Lösungen" ohne ein weiteres Prinzip, das eine davon auszeichnete.

Ausgehend von den phänomenologischen Erwartungen und numerischen Resultaten kommt das Energiespektrum $E(k) \propto k^{-3}$ von Kraichnan [Kra] am ehesten in Frage, möglicherweise mit logarithmische Korrekturen, die Lokalität im k-Raum sicherstellen. Allein daraus kann man ableiten, daß minimale Modelle prinzipiell keine Kandidaten für eine CFT Lösung zweidimensionaler Turbulenz sein können. Vielmehr lassen sich die Bedingungen an den Feldinhalt der CFT Lösung leicht erfüllen, wenn man logarithmische CFTs betrachtet.

Ich kann für mich in Anspruch nehmen, in meiner Arbeit [4] eine *eindeutige* Lösung zweidimensionaler Turbulenz mit Hilfe logarithmischer CFTs explizit konstruiert zu haben. Ferner erfüllt meine Lösung alle phänomenologischen Erwartungen und stimmt mit numerischen Resultaten überein. Meine Lösung hat $c = -48$ und das Feld $\psi(x)$ besitzt eine Skalendimension von $h(\psi) = -1$. Der führende Term in der OPE hat $h(\phi) = -2$, so daß $\omega(x)$ formal verschwindende Skalendimension erhält. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt auch hier wieder aus der Tatsache, daß die in Frage kommenden LCFTs vollständig klassifiziert sind$^{\triangle***}$.

Insbesondere sind die Hopf-Gleichungen exakt erfüllt (und nicht nur im Ultraviolet-Limes). Dies liegt an einer zusätzlichen Symmetrie, die bei LCFTs auftritt: Dort bilden die primären Felder Paare $\psi, \tilde{\psi}$ mit $h(\psi) = h(\tilde{\psi})$, von denen das Feld $\tilde{\psi}$ logarithmische Terme in Korrelationsfunktionen produziert. Man hat z.B. $\langle\psi(x)\tilde{\psi}(y)\rangle \propto (x-y)^{-2h(\psi)}$ und $\langle\tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}(y)\rangle \propto (x-y)^{-2h(\psi)}(\log(x-y)+C)$ mit C als beliebiger Konstante. Ist nun weiter $h(\psi) \in \mathbb{Z}$, dann hat man $\langle\psi(x)\psi(y)\rangle = 0$ und ψ liefert einen erhaltenen Strom. Dies ist genau die Symmetrie, durch die die Hopf-Gleichungen exakt erfüllt sind.

Mein Modell ist darüberhinaus in der Lage, für alle Flußintegrale konstante Dissipation im Limes verschwindender Viskosität sicherzustellen, was ein Novum darstellt. Ebenfalls zum ersten Mal wurde damit ein Modell angegeben, in dem das Problem von Infrarot-Divergenzen [Pol] behandelt werden kann. Dies liegt an der Existenz unendlich vieler chiraler lokaler Felder, mit deren Hilfe ein Bose-ähnliches Kondensat im k-Raum (für $k \to 0$) konstruiert werden kann, das den durch äußere Rührkräfte vermittelten Randbedingungen genügen kann. Solch ein Bose-Kondensat führt im Koordinatenraum zu Korrelationsfunktionen, die rein holomorphe oder antiholomorphe Anteile besitzen. Dies kann nur durch chirale Felder reproduziert werden, die allerdings nur existieren können, wenn ihre Skalendimension (halb-) zahlig ist, so daß Lokalität nicht verletzt wird. Genau dies ist in der von mir vorgeschlagenen CFT-Lösung automatisch der Fall. Ich bin somit in [4] in der Lage, eine gute CFT Lösung zweidimensionaler Turbulenz anzugeben und auch ihre Eindeutigkeit zu beweisen. Letztere folgt aus einer sorgfältigen Betrachtung der diophantischen Gleichungen, die durch die Parameter einer CFT erfüllt werden müssen, damit diese die Turbulenz korrekt beschreiben kann.

Ich hoffe, daß diese Auswahl von Anwendungen auf konkrete physikalische Fragestellungen deutlich macht, daß Klassifikationen einen echten Nutzen haben können. Das Erzielen einer (Teil-) Klassifikation impliziert meist das Aufdecken eines “Musters”, einer Struktur. Und wie es bis jetzt eigentlich noch immer der Fall war, scheint es keine abstrakte Struktur zu geben, die man in der Welt der Mathematik (er)finden kann, die sich nicht auch im uns umgebenden “realen” Universum in irgendeiner Form manifestiert. Ich denke, daß es diese Erfahrung ist, die mathematische Physiker antreibt.

· ⋄ · IV · ⋄ ·
Ausblick

Ich habe in diesem Bericht diejenigen Resultate geschildert, die im Zeitraum der Förderung durch die DFG von mir erzielt und publiziert worden sind. In diesem Abschnitt möchte ich kurz solche Ergebnisse aufführen, für die während des Förderungszeitraumes keine Zeit mehr bestand, sie zu veröffentlichen. Zum einen sind dies Resultate über nicht-unitäre N=2 supersymmetrische CFTs und die Frage nach ihrer Rationalität, zum anderen sind dies Überlegungen zu den Modulräumen vierdimensionaler supersymmetrischer Yang-Mills Theorien, insbesondere zu den Modulräumen der exakten Lösungen von Seiberg und Witten:

· ⋄ · A · ⋄ · ⋄ · ⋄ · ⋄ · ⋄ · Nicht-unitäre N=2 susy konforme Feldtheorien · ⋄ ·

Aus meiner Arbeit [7] und dem dort eingeführten Formalismus ist ein sehr enger, aber bis

$^{\triangle***}$Genauer genommen geht dem zunächst ein Schritt voran, bei dem man erkennt, daß Kraichnan's Spektrum eine OPE ohne dimensionalen Defekt verlangt, was ausschließlich durch ein Tensorprodukt (mindestens) zweier einfacher CFTs erreicht werden kann.

dato völlig unvermuteter Zusammenhang, von nicht-unitären, rationalen N=2 supersymmetrischen konformen Feldtheorien (SCFTs) zu logarithmischen CFTs ersichtlich. In der Tat lassen sich letztere aus ersteren konstruieren, wie z.B. die schon erwähnte $c = -2$ Theorie aus einem b, c System. Bei N=2 SCFTs mit maximal erweiterter chiraler Symmetrie-Algebra bnötigt man zwei Quantenzahlen zur Beschreibung von Höchstgewichtszuständen, das konforme Gewicht h und die Ladung Q bezüglich J_0, dem Nullmode des in der superkonformen Algebra auftretenden Stroms. Es existieren nicht-unitäre SCFTs mit endlich vielen diskreten Höchstgewichtszuständen $|h_i, Q_i\rangle$, $i \in I$, $|I| < \infty$, und einer endlichen Anzahl von kontinuierlichen Spektren $|h_j(Q), Q\rangle$, $j \in J$, $|J| < \infty$ mit beliebiger Ladung $Q \in \mathbb{R}$. Dieser kontinuierliche Anteil im Spektrum scheint die Existenz *rationaler* nicht-unitärer SCFTs zu vereiteln.

Der geschilderte Zusammenhang von N=2 SCFTs und LCFTs gilt aber auch für diese Fälle. Mehr noch, die entsprechenden LCFTs sind rational in dem von mir begründeten Schema. Man kann daher auch für solche nicht-unitären N=2 SCFTs ebenfalls modulinvariante Zustandssummen finden, die als Bilinearformen

$$Z = \sum_{i,j \in K} \chi_i^*(\bar{q}) \mathcal{N}_{ij} \chi_j(q) \tag{24}$$

in *endlich* viele Modulformen (verallgemeinerte Charaktere) $\chi_i(q) \in \mathbb{Z}[\log(q)][[q]]$ mit $|K| \leq |I| + |J|$ zerlegt werden können. Damit können im Sinne logarithmischer CFTs nicht-unitäre N=2 SCFTs rational sein. Interessanterweise wird Modulinvarianz bereits mit einem Teil des kontinuierlichen Spektrums erreicht, der Rest entkoppelt von dieser reduzierten Theorie. Weiter treten logarithmische Operatoren auch direkt in den N=2 SCFTs auf – sie erzeugen gerade die kontinuierliche Entartung des Spektrums, stellen aber gleichzeitig die notwendige zusätzliche Symmetrie dar, unter der die Zustandssumme zu endlich vielen Termen zusammengefaßt werden kann.

LCFTs haben wohl grundsätzliche $c_{\text{eff}} \in \mathbb{Z}_+$. Es ist daher nicht überraschend, daß es im Gegensatz zu $N = 0, 1$ CFTs mit ihren diskreten Serien (auch nicht-unitärer) minimaler Modelle bei N=2 SCFTs nur die Serie $c_k = 3k/(k+2)$ gibt, die keine Verallgemeinerung für $k \in \mathbb{Q}$ hat. Die einzigen bekannten nicht-unitären N=2 SCFTs, die logarithmisch rational sein können, haben $c_{\text{eff}} = 3$. Allerdings gibt es davon wesentlich mehr Serien, als im $N = 0, 1$ Fall. Man hat also für N=2 ein qualitativ anderes Bild für den Modulraum, wie für N=0 und N=1 (die in ihrer Struktur fast identisch sind): Alle nicht-unitären SCFTs liegen bei $c_{\text{eff}} = 3, 6, 9, \ldots$, und sind logarithmsich. Es gibt somit keine nicht-unitären SCFTs, die gegen logarithmische SCFTs konvergieren. In diesem Sinne besteht $\mathcal{M}(d{=}2, N{=}2, c \leq 3)$ nur aus seinen eigenen Häufungspunkten (und der unitären minimalen Serie natürlich).

Noch wesentlich direkter ist der Zusammenhang zwischen LCFTs und SCFTs, wenn die zugrundeliegende Kac-Moody Algebra nicht von einer gewöhnlichen Lie-Gruppe, sondern von einer Lie-Supergruppe abgeleitet wird, da die Darstellungstheorie letzterer sowieso nicht vollständig reduzible Tensorproduktdarstellungen enthält. Die allerersten Hinweise auf LCFTs wurden ja auch bei Betrachtungen der Supergruppe $GL(1,1)$ gefunden. Das ist insofern bedeutsam, als daß es in der Superstringtheorie immer wieder Fälle gibt, bei denen das CFT-Bild zusammenzubrechen scheint: Der selbstduale sechsdimensionale String, tensionlose Strings, sogenannte kleine Instantonen und solitonische String-Hintergründe.

Vermutlich lassen sich all diese Fälle als logarithmsiche Grenzfälle von CFTs auffassen, wobei anders als bei den bis jetzt behandelten LCFTs die Limestheorie nicht wirklich nicht-unitär ist (nicht-unitäre Theorien sind in der Stringtheorie im allgemeinen nicht gern gesehen). Vielmehr hat man es mit LCFTs zu tun, deren Shapovalov-Form nur noch positiv semidefinit ist. In jedem Fall aber haben auch diese LCFTs nicht-triviale Felder mit verschwindender Skalendimension. Siehe auch [log] für einige erste Ansätze in diese Richtung.

· ◇ · B · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · ◇ · N=2 SUSY YANG-MILLS & SEIBERG-WITTEN THEORIEN · ◇ ·
Eine weitere – in meinen Augen hochinteressante – Arbeit habe ich in diesem Zeitraum begonnen, aber noch nicht endgültig abschliessen können:

Eine Methode, etwas über Feld- oder Stringtheorien in höheren Dimensionen zu lernen, ist es, teilweise Dimensionen zu kompaktifizieren und effektive Feldtheorien in niedrigeren Dimensionen zu erhalten. Eine andere Methode ist das Ausnutzen von Dualitäten, um den Modulraum einer Theorie in ansonsten nicht zugänglichen Bereichen zu erforschen. Die großen Durchbrüche der letzten zwei Jahre auf dem Gebiet der Stringtheorie beruhen im wesentlichen auf einer geschickten Kombination dieser beiden Methoden [InSe,Sei,SeWi,VaWi,Wit,Wit1].

Nathan Seiberg und Edward Witten waren damit in der Lage, *exakte* Lösungen von 4-dimensionalen N=2 supersymmetrischen Yang-Mills Theorien zu konstruieren, was einen großen Durchbruch für unsere Bemühungen um das Verständnis von nicht-abelschen Eichtheorien bedeutet. Außerdem zeigt dieses Resultat, daß die schon seit langem vermutete S-Dualität realistisch ist und es ermöglicht, Lösungen zu finden, die phänomenologisch interessante Eigenschaften wie asymptotische Freiheit und Confinement aufweisen.

Obwohl der Modulraum der exakten nicht störungstheoretischen Niederenergie Lösungen vollständig bekannt ist, stellt das explizite Berechnen der Perioden und des Präpotentials nach wie vor ein großes Problem dar. Die Modulräume zu $\mathfrak{g}$ Super-Yang-Mills Theorien sind hyperelliptische Kurven von Geschlecht rang($\mathfrak{g}$). Da die Perioden auf diesen Riemannschen Flächen kovariant unter konformen Koordinatenwechseln transformieren müssen, verhalten sie sich im Grunde genau wie konforme Blöcke einer $2(\mathrm{rang}(\mathfrak{g})+1)$-Punkt-Funktion einer CFT. Das kann man explizit machen, indem man die hyperelliptische Kurve durch die Riemann-Sphäre ersetzt, wo anstelle der singulären Punkte Vertexoperatoren plaziert werden. Angenommen, es gäbe eine CFT mit einem geeigneten selbstkonjugiertem Feld Φ, so daß der sogenannte Verlinde-Move mit diesem Feld genau die gewünschte Monodromie-Information liefert, die in den Perioden enthalten ist[△∗◇]. Eine solche CFT muß ein nicht-triviales Feld Ψ der Skalendimension Null besitzen, so daß das Fusionsprodukt $[\Phi]\times[\Phi]=[\mathbb{1}]+[\Psi]$. Bereits diese Forderung schränkt die möglichen CFTs stark ein. Macht man sich ferner die jeder CFT zugrunde liegende Quantengruppen Struktur zunutze, kann man zeigen, daß Φ degeneriert auf Level 2 sein muß. Zuletzt muß man nur noch sicherstellen, daß die CFT grundsätzlich die gleiche Symmetrie wie die Yang-Mills Theorie aufweist. Damit ist die CFT eindeutig festgelegt: Es ist die rationale logarithmische CFT des minimalen Models $c_{2,1}(\mathfrak{g})$ zur Kac-Moody Algebra $\hat{\mathfrak{g}}$. Dies stellt eine wunderschöne Manifestation

[△∗◇] Im Grunde ist die komplette Information über die Zopfgruppenstruktur in den konformen Blöcken enthalten. Gesucht ist eine CFT, die genau die Zopfgruppenstruktur mit Vertexoperatoren auf der Riemann-Sphäre simuliert, wie sie die gegebene hyperelliptische Kurve trägt. Mit etwas Nachdenken kann man einsehen, daß dies dann der Fall ist, wenn die paarweisen Singularitäten $e_i^{\pm}$, die die Verzweigungsschnitte erzeugen, repräsentiert durch $\Phi(z_i^{\pm})$ beim Zusammenfliessen des Verzweigungsschnittes auf einen Punkt dort durch ein Feld $\Psi(z_i)$ repräsentiert werden, daß sich (außer an diesem Punkt!) wie die Identität verhält.

der Tatsache dar, daß Seiberg-Witten Modelle zu 2-dimensionalen integrablen Systemen in Beziehung stehen, da die entsprechenden integrablen Systeme in engem Zusammenhang zu CFTs, speziell LCFTs, stehen.

Korrelationsfunktionen von CFTs, besonders wenn alle Felder lediglich degeneriert auf Level 2 sind, lassen sich sehr leicht explizit ausrechnen. Außerdem genügen sie wesentlich einfacheren Differentialgleichungen, wie die sonst für die Perioden verwendeten Picard-Fuchs Gleichungen. Besonders elegant kann man mit Hilfe der Korrelationsfunktionen die asymptotischen Regionen des Modulraumes erforschen, da man die ganze Struktur von CFTs wie OPE bzw. Fusionsalgebra und Kreuzungssymmetrie zur Verfügung hat, mit deren Hilfe die Korrelationsfunktionen entweder faktorisiert oder durch Einsetzen der OPE kontrahiert werden können.

Die üblichen Wege zur Berechnung der Perioden liefen entweder auf das Evaluieren der Integrale über die Seiberg-Witten Differentialform, integriert entlang einer Basis von Zykeln, hinaus, oder das Aufstellen und Lösen der Picard-Fuchs Gleichungen, wobei bei letzterem Zugang die Integrale immer noch in führender Ordnung bestimmt werden mußten, um die korrekte Asymptotik sicherstellen zu können. Mein neuartiger Weg über eine auf dem Modulraum operierende CFT liefert die Perioden ohne Umwege und automatisch mit der richtigen Asymptotik, da ihre konforme Kovarianz voll ausgenutzt wird.

Die von mir hier eingeführte Methode ist übrigens wesentlich allgemeiner gültig, als nur für die speziellen hyperelliptischen Kurven, die als Modulräume von Seiberg-Witten Modellen auftreten: sie läßt sich auf beliebige hyperellitpische Kurven anwenden. Die speziellen Kurven von Seiberg und Witten haben lediglich die zusätzliche Eigenschaft, daß die Summe aller singulären Punkte Null ergeben muß. Eleganterweise liefert meine Methode direkt die oft nicht ganz triviale Abhängigkeit der generalisierten hypergeometrischen Funktionen (durch die die Perioden gegeben sind) von den Moduli (als die man üblicherweise Vakuumerwartungswerte der skalaren Felder der Yang-Mills Theorie verwendet) durch einfaches Einsetzen dieser zusätzlichen algebraischen Bedingung an die Moduli (da die singulären Punkte von den Moduli abhängen).

Es ist hier noch anzumerken, daß die CFTs, die auf dem Modulraum leben, als minimale Modelle betrachtet, trivial sind. Diese Tatsache geht Hand in Hand damit, daß die Korrelationsfunktionen lediglich Monodromie- und Periodeninformationen liefern. CFTs treten aber noch in einem anderem Zusammenhang auf, der mit den Modulräumen von Yang-Mills Theorien zu tun hat: Letztere sind ja die effektiven Niederenergie Lösungen von Superstringtheorien. In einer entscheidenden Arbeit haben Cumrum Vafa und Edward Witten [VaWi] exakte Resultate zur sogenannten S-Dualität und Stringtheorie mit starker Kopplung erhalten können. Rätselhaft blieb allerdings, wieso die von ihnen abgeleiteten Zustandssummen mit den chiralen Anteilen der Zustandssummen bestimmter RCFTs identisch sind. Dafür bieten die sogenannten tensionlosen Strings [Wit] eine mögliche Erklärung. In sechs Dimensionen sollten diese eine nicht-triviale Feldtheorie bilden – allerdings ist bis jetzt keine sechsdimensionale nicht-triviale Feldtheorie bekannt. Kompaktifiziert auf vier Dimensionen sollten tensionlose Strings durch eine *konforme* Feldtheorie beschrieben werden. CFTs in vier Dimensionen und sechsdimensionale Feldtheorien werden zur Zeit sehr intensiv erforscht.

In zwei Dimensionen bewegt man sich glücklicherweise wieder auf bekanntem Boden, und kann – unter Ausnutzen von Dualität, die tensionlose Strings mit Super-Yang-Mills Theorie in Beziehung setzt – die Zustandssummen exakt hinschreiben, wenn die tensionlose

Stringtheorie in sechs Dimensionen mit $\mathbb{CP}^2$ oder $\mathbb{K}3$ auf zwei Dimensionen kompaktifiziert wird. Zeigt man weiter, daß Kompaktifizieren und Dualisieren miteinander vertauschen, kann man dieses Ergebnis wieder in vier und sechs Dimensionen zurückübersetzen. Es ist zu vermuten, daß das auftreten von chiralen CFT Zustandssummen letztlich in der konformen Kovarianz der Perioden begündet liegt, da diese das Präpotential eindeutig bestimmen, welches widerum der entscheidende Input für die Theorie ist. In zukünftigen Arbeiten soll daher auch untersucht werden, in wie fern die Modulräume der Superstringtheorien selbst mit CFT-Methoden behandelt werden können. Ein vielversprechendes Konzept dafür sind die sogenannten BPS-Algebren, das vielleicht alle hier angerissenen Bereiche dieses weiten Feldes unter einen Hut bringen kann.

In jedem Fall sind das Auftreten chiraler Zustandssummen von CFTs in den Stringtheorie-Zustandssummen, sowie das Auftreten von LCFTs zur Beschreibung der Geometrie der Quantengrundzustände von String-Kompaktifizierungen mehr als deutliche Hinweise, daß CFTs noch lange nicht in der Stringtheorie ausgedient haben, trotz, oder gerade wegen, der neuen Erkenntnisse zu String-Dualitäten.

· ◇ · V · ◇ ·

Zu guter Letzt

Für mich darf ich das Projekt als in jeder Hinsicht außerordentlich erfolgreich bezeichnen. Ich denke, daß meine Resultate das von der DFG in mich gesetzte Vertrauen rechtfertigen. Allen Mitgliedern des IAS möchte ich für die aufs höchste motivierende, kreative und spannende Atmosphäre danken, die ich während meines Aufenthaltes dort erleben durfte. Mein besonderer Dank aber gilt Prof. Edward Witten und der DFG für ihr Vertrauen und die damit verbundene Förderung, die meinen Aufenthalt erst möglich gemacht haben.

· ◇ · V · ◇ ·

Referenzen△◇

[BPZ] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333

[Ber] D. Bernard, *(Perturbed) Conformal Field Theory Applied to 2D Disordered Systems: An Introduction*, preprint SPhT-95-113, IHES/P/95/85 [hep-th/9509137]

[BFKNRV] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen, Nucl. Phys. **B361** (1991) 255–289, also published in P. Bouwknegt, K. Shoutens (eds.), *$\mathcal{W}$-Symmetry*, Adv. Series in Math. Phys., World Scientific (1995)

[BoSc] P. Bouwknegt, K. Schoutens, Phys. Rep. **223** (1993) 183

[CIZ] A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber, Nucl. Phys. **B280**[FS18] (1987) 445 ·◇· Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1

[cs-cft] G. Moore, N. Read, Nucl. Phys. **B360** (1991) 362 · ◇ · G. Moore N. Seiberg, Phys. Lett. **B220** (1989) 422 · ◇ · E. Witten, Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351

[DV^2] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde, Commun. Math. Phys. **115** (1988) 649

△◇Es sind nur Arbeiten zitiert, von denen ich annehme, daß sie für das Verständnis meines Berichtes relevant sein könnten.

[EFH^{2}NV] W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, W. Nahm, R. Varnhagen, Nucl. Phys. **B383** (1992) 249–288

[EFH^{2}V] W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, R. Varnhagen, *$\mathcal{W}$-Algebras*, Proceedings of the Workshop *Superstrings and Related Topics*, Trieste, July 1993, E. Gava, A. Masiero, K.S. Narain, S. Randjbar-Daemi, Q. Shafi (eds.), World Scientific (1995) 435

[F&Dual] Siehe hierzu zum Beispiel:
C. Vafa, Nucl. Phys. **B469** (1996) 403 ·⋄· D. R. Morrison, C. Vafa, Nucl. Phys. **B473** (1996) 74 ·⋄· Nucl. Phys. **B476** (1996) 437 ·⋄· S. Sethi, E. Witten, C. Vafa, Nucl. Phys. **B480** (1996) 213 ·⋄· I. Brunner, M. Lyncker, R. Schimmrigk, Phys. Lett. **B387** (1996) 750 · ⋄ · R. Friedman, J. Morgan, E. Witten, Commun. Math. Phys. **187** (1997) 679-743 ·⋄· M. Bershadsky, A. Johansen, T. Pantev, V. Sadov, *On Four-Dimensional Compactifications of F-Theory*, preprint HUTP-96/A054, IASSNS-HEP-96/119 [hep-th/9701165]

[Flo1] M. Flohr, *Quasi-primary fields, $\mathcal{W}$-algebras and non minimal models*, preprint BONN-IR-91-30 (1991) Diploma thesis

[Flo2] M. Flohr, Commun. Math. Phys. **157** (1993) 179–212 [hep-th/9207019] · ⋄ · Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 1071-1082 [hep-th/9312097]

[Flo3] M. Flohr, *On the Rational Conformal Quantum Field Theories in Two Dimensions with Effective Central Charge $c_{\rm eff} \leq 1$*, preprint BONN-IR-94-11 (1994) Ph.D. thesis

[Flo4] M. Flohr, *On a New Universal Class of Phase Transitions and Quantum Hall Effect*, preprint CSIC-IMAFF-137-1994 [hep-th/9412053]

[FlVa] M. Flohr, R. Varnhagen, Jour. Phys. **A27** Math. Gen. (1994) 3999-4010 [hep-th/9309083]

[FKW] I. Frenkel, V.G. Kac, M. Wakimoto, Commun. Math. Phys. **147** (1992) 295

[Gin] P. Ginsparg, Nucl. Phys. **B295**[FS21] (1988) 153,

[Gur] V. Gurarie, Nucl. Phys. **B410** (1993) 535

[HaRe] R.L. Willet, et al., Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 1776 · ⋄ · F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 956

[InSe] K. Intriligator, N. Seiberg, Nucl. Phys. **B431** (1994) 551-565 · ⋄ · Nucl. Phys. **B444** (1995) 125-160 · ⋄ · *Phases of $N = 1$ Supersymmetric Gauge Theories and Electric-Magnetic Triality*, Proceedings of the Conference *Future perspectives in string theory (STRINGS '95)*, Los Angeles, March 1995, I. Bars, P. Bouwknegt, J. Minahan, D. Nemeschansky, K. Pilch, H. Saleur, N. Warner (eds.), World Scientific (1996) 270-282 · ⋄ · Nucl. Phys. Proc. Suppl. **45BC** (1996) 1-28

[Jai] J.K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 199-202 ·⋄· Phys. Rev. **B40** (1989) 8079-8082 · ⋄ · Advances in Physics **41**,2 (1992) 105-146 · ⋄ · B.I. Halperin, P.A. Lee, N. Read, Phys. Rev. **B47** (1993) 7312

[KaPe] V.G. Kac, D.H. Peterson, Adv. Math. **53** (1984) 125

[KLZ] St. Kievelson, D.-H. Lee, S.-C. Zhang, Phys. Rev. **B46** (1992) 2223-2238

[Kir] E.B. Kiritsis, Phys. Lett. **B217** (1989) 427

[Kra] R.H. Kraichnan, Phys. of Fluids **10** (1967) 1417 · ⋄ · J. of Fluid Mech. **47** (1971) 525 · ⋄ · J. of Fluid Mech. **67** (1975) 155

[log] Einige neuere Arbeiten sind zum Beispiel:
A. Aghamohammadi, M. Alimohammadi, M. Khorrami, Mod. Phys. Lett. **A12** (1997) 1349-1353 · ⋄ · D. Berenstein, R. Corrado, W. Fischler, S. Paban, M. Rozali, Phys. Lett. **B384** (1996) 93 · ⋄ · D. Bernard, Z. Maassarani, P.

MATHIEU, Mod. Phys. Lett. **A12** (1997) 535-544 ·⋄· A. BILAL, I.I. KOGAN, Nucl. Phys. **B449** (1995) 569-588 ·⋄· J.S. CAUX, I.I. KOGAN, A. LEWIS, A.M. TSVELIK, Nucl. Phys. **B489** (1997) 469-484 ·⋄· J.S. CAUX, I.I. KOGAN, A.M. TSVELIK, Nucl. Phys. **B466** (1996) 444 ·⋄· J. ELLIS, N.E. MAVROMATOS, D.V. NANOPOULOS, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 2639-2674 ·⋄· *D Brane Recoil mislays Information*, preprint ACT-14/96, CERN-TH/96-264, CTP-TAMU-49/96, OUTP-96-57P [hep-th/9609238] ·⋄· L.S. GEORGIEV, I.T. TODOROV, *Characters and Partition Functions for the Wen-Wu CFT Model of the Haldane-Rezayi Quantum Hall State*, preprint INRNE-TH-96/13 [hep-th/9611084] ·⋄· A.M. GHEZELBASH, V. KARIMIPOUR, Phys. Lett. **B402** (1997) 282-289 ·⋄· S. GURUSWAMY, A.W.W. LUDWIG, *Relating $c < 0$ and $c > 0$ Conformal Field Theories*, preprint IC/96/273 [hep-th/9612172] ·⋄· H.G. KAUSCH, *Curiosities at $c = -2$*, perprint DAMTP-95-52 [hep-th/9510149] ·⋄· M.R. GABERDIEL, H.G. KAUSCH, Nucl. Phys. **B477** (1996) 293-318 ·⋄· Phys. Lett. **B386** (1996) 131-137 ·⋄· I.I. KOGAN, A. LEWIS, *Origin of Logarithmic Operators in Conformal Field Theory*, preprint OU-TP-97-25P [hep-th/9705240] ·⋄· I.I. KOGAN, A. LEWIS, O.A. SOLOVIEV, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 2425-2436 ·⋄· *Knizhnik-Zamolodchikov-type equations for the gauged WZNW models*, preprint QMW-PH-97-5, OU-TP-97-11P [hep-th/9703028] ·⋄· I.I. KOGAN, N.E. MAVROMATOS, Phys. Lett. **B375** (1996) 111-120 ·⋄· I.I. KOGAN, N.E. MAVROMATOS, J.F. WHEATER, Phys. Lett. **B387** (1996) 483 ·⋄· F. LIZZI, N.E. MAVROMATOS, Phys. Rev. **D55** (1997) 7859-7871 ·⋄· Z. MAASSARANI, D. SERBAN, Nucl. Phys. **B489** (1997) 603-625 ·⋄· M. MILOVANOVIĆ, N. READ, Phys. Rev. **B53** (1996) 13559 ·⋄· V. PERIWAL, O. TAFJORD, Phys. Rev. **D54** (1996) R3690-R3692 ·⋄· L. ROZANSKY, H. SALEUR, Nucl. Phys. **B389** (1993) 365-423 ·⋄· CH. SCHMIDHUBER, Nucl. Phys. **B404** (1993) 342 ·⋄· Nucl. Phys. **B453** (1995) 156 ·⋄· M.R. RAHIMI TABAR, A. AGHAMOHAMMADI, M. KHORRAMI, *The logarithmic conformal field theories*, preprint Tehran Univ. et al. [hep-th/9610168] ·⋄· M.R. RAHIMI TABAR, S. ROUHANI, Ann. Phys. **246** (1996) 446-458 ·⋄· Nuovo Cim. **112B** (1997) 1079-1084 ·⋄· Europhys. Lett. **37** (1997) 447-451 ·⋄· *Logarithmic Correlation Functions in Two Dimensional Turbulence*, preprint IPM-96-151m [hep-th/9606154] ·⋄· *Zamolodchikov's C-Theorem and the logarithmic conformal field theory*, preprint Sharif Univ. Tehran [hep-th/9707060] ·⋄· F. ROHSIEPE, *On Reducible but Indecomposable Representations of the Virasoro Algebra*, preprint BONN-TH-96-17 [hep-th/9611160] ·⋄· A. SHAFIEKHANI, M.R. RAHIMI TABAR, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 3723-3738 ·⋄· X-G. WEN, Y.S. WU, Y. HATSUGAI, Nucl. Phys. **B422**[FS] (1994) 476-494

[Lut] C.A. LÜTKEN, Nucl. Phys. **B396** (1993) 670-692 ·⋄· J. Phys. **A26** Math. Gen. (1993) L811-L817 ·⋄· C.A. LÜTKEN, G.G. ROSS, Phys. Rev. **B48** (1993) 2500

[MoOl] C. MONTONEN, D. OLIVE, Phys. Lett. **B72** (1977) 117-120

[Nah] W. NAHM, Duke Math. Jour. **54** (1987) 579 ·⋄· Int. J. Mod. Phys. **A6** (1991) 2837 ·⋄· Int. J. Mod. Phys. **B8** (1994) 3693-3702

[Pol] A.M. POLYAKOV, Nucl. Phys. **B396** (1993) 367-385 ·⋄· Phys. Rev. **E52** (1995) 6183

[Sch] H. SCHWARZ, Phys. Lett. **B367** (1996) 97-103

[Sch1] A.N. SCHELLEKENS, Commun. Math. Phys. **153** (1993) 159

[Sei] N. SEIBERG, Phys. Lett. **B318** (1993) 469-475 ·⋄· Phys. Rev. **D49** (1994) 6857-6863

[SeWi] N. SEIBERG, E. WITTEN, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19-52 ·⋄· Nucl. Phys. **B431** (1994) 484-550

[Sto] M. STONE (ed.), *Quantum Hall Effect*, World Scientific (1992)

[top] X-G. WEN, Int. J. Mod. Phys. **B2** (1990) 239 ·⋄· Phys. Rev. **B40** (1989) 7387

· ⋄ · X-G. Wen, Q. Niu, Phys. Rev. **B41** (1990) 9377 · ⋄ · S.M. Girvin, A.H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1252 · ⋄ · S.C. Zhang, T.H. Hansson, S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **62** (1988) 82 · ⋄ · N. Read, Phys. Rev. Lett. **62** (1988) 86

[Vav] C. Vafa, Nucl. Phys. **B469** (1996) 403-418

[VaWi] C. Vafa, E. Witten, Nucl. Phys. **B431** (1994) 3-77

[Wit] E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 541-559 ·⋄· *Some Comments on String Dynamics*, Proceedings of the Conference *Future perspectives in string theory (STRINGS '95)*, Los Angeles, March 1995, I. Bars, P. Bouwknegt, J. Minahan, D. Nemeschansky, K. Pilch, H. Saleur, N. Warner (eds.), World Scientific (1996) 501-523 · ⋄ · Nucl. Phys. **B471** (1996) 195-216 · ⋄ · P. Horava, E. Witten, Nucl. Phys. **B475** (1996) 94-114 · ⋄ · N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. **B471** (1996) 121-134

[Wit1] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, preprint IASSNS-HEP-94/96 [hep-th/9411102]

[02mod] Die grundlegenden Arbeiten sind:
P. Berglund, M. Henningson, Nucl. Phys. **B433** (1995) 311 ·⋄· R. Blumenhagen, R. Schimmrigk, A. Wisskirchen, Nucl. Phys. **B486** (1997) 598 · ⋄ · Nucl. Phys. **B461** (1996) 460 ·⋄· R. Blumenhagen, S. Sethi, Nucl. Phys. **B491** (1997) 263-278 · ⋄ · R. Blumenhagen, A. Wisskirchen, Nucl. Phys. **B454** (1995) 561 ·⋄· Nucl. Phys. **B475** (1996) 225 ·⋄· Ti-Ming Chiang, J. Distler, B. Greene, Nucl. Phys. **B496** (1997) 590-616 ·⋄· M. Dine, N. Seiberg, X. Wen, E. Witten, Nucl. Phys. **B278** (1986) 769 · ⋄ · Nucl. Phys. **B289** (1987) 319 · ⋄ · J. Distler, *Notes on* $(0,2)$ *Superconformal Field Theories*, Proceedings of the Summer School *High Energy Physics and Cosmology*, Trieste, June-July 1994, E. Gava, A. Masiero, K.S. Narain, S. Randjbar-Daemi, Q. Shafi (eds.), World Scientific (1995) 322-351 · ⋄ · J. Distler, B. Greene, Nucl. Phys. **B304** (1988) 1 · ⋄ · Nucl. Phys. **B309** (1988) 295 · ⋄ · J. Distler, B. Greene, D. Morrison, Nucl. Phys. **B481** (1996) 289 · ⋄ · J. Distler, S. Kachru, Nucl. Phys. **B413** (1994) 213 · ⋄ · Nucl. Phys. **B430** (1994) 13 · ⋄ · Nucl. Phys. **B442** (1995) 64 · ⋄ · S. Kachru, E. Witten, Nucl. Phys. **B407** (1993) 637 · ⋄ · T. Kawai, K. Mohri, Nucl. Phys. **B425** (1994) 191 · ⋄ · M. Kreuzer, M. Nikbakht-Tehrani, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **56B** (1997) 136-141 ·⋄· M. Nikbakht-Tehrani, Nucl. Phys. **B491** (1997) 279-303 · ⋄ · E. Silverstein, E. Witten, Nucl. Phys. **B444** (1995) 161 · ⋄ · E. Witten, Nucl. Phys. **B268** (1986) 79 · ⋄ · Nucl. Phys. **B403** (1993) 159

[Zir] M. Zirnbauer, Ann. Physik **3** (1994) 513