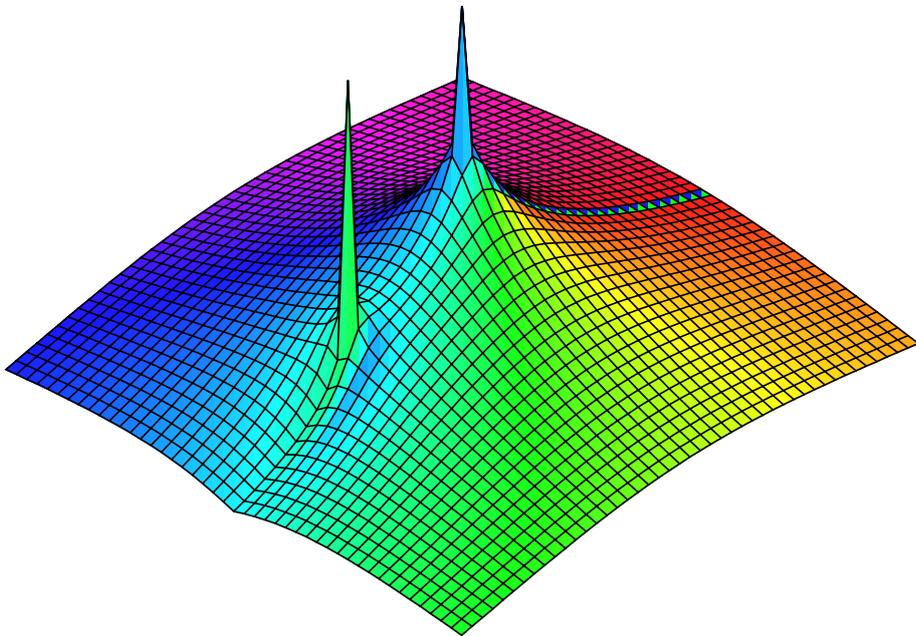

Grundlagen & Anwendungen der logarithmischen konformen Feldtheorie

Michael Flohr



Grundlagen & Anwendungen der logarithmischen konformen Feldtheorie

**Dem Fachbereich Physik der Universität Hannover zur Habilitation vorgelegte
wissenschaftliche Arbeit**

Michael Flohr

Dezember 2002

Titelbild: Das corpus delicti, der konforme Block der \mathbb{Z}_2 -Twistfelder $\langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle$ der konformen Feldtheorie mit zentraler Ladung $c = -2$, mit dem alles begann . . .

Hier gezeigt ist der Bereich $x \in [-2, 2] \times [-2i, 2i] \subset \mathbb{C}$, die Spitzen liegen bei $x = 0$ und $x = 1$, dort hat der konforme Block seine Nullstellen. Die Höhe gibt den Modulus, die Farbe das Argument an. Die negative reelle Achse zeigt nach hinten rechts.

**There is no science without fancy
and no art without facts**

Vladimir Nabokov

For Birgitt

**for all the travelling together on the same worldsheet
for forming together this wonderful entangled quantum state
for being the perfect support for me crazy scientist**

Zusammenfassung

Diese Schrift versammelt meine hauptsächlichen Arbeiten zum Gebiet der sogenannte *logarithmischen konformen Feldtheorien*. Dies sind zwei-dimensionale konforme Quantenfeldtheorien, bei denen Korrelationsfunktionen logarithmische Divergenzen aufweisen können. Aus heutiger Sichtweise ist es sinnvoller, solche konforme Feldtheorien dadurch zu charakterisieren, dass einige der Darstellungen ihrer chiralen Symmetrie-Algebra unzerlegbar aber reduzibel sind.

Das Hauptgewicht meiner Arbeiten liegt auf der Begründung der logarithmischen konformen Feldtheorien als bona fide Theorien, bei denen sich alle Strukturen und Methoden, die von den gewöhnlichen konformen Feldtheorien bekannt sind und als nützlich geschätzt werden, entsprechend übertragen lassen. Dies gilt insbesondere für die Strukturen, die für rationale konforme Feldtheorien besonders wichtig sind. Dies sind vor allem die Invarianz unter der Modulgruppe, die Fusionsalgebra und ihr Zusammenhang mit der Modulgruppe via der Verlinde-Formel; die explizite Form von Nullvektoren und die daraus resultierenden Differentialgleichungen, welche die Form der Korrelationsfunktionen festzulegen vermögen; die Operatorproduktentwicklung; und das explizite Spektrum der Randzustände. Mein Zugang zur logarithmischen konformen Feldtheorie konzentriert sich dabei vor allem auf die darstellungstheoretischen Aspekte.

Die Verallgemeinerung dieser Strukturen auf den logarithmischen Fall hat zum Ergebnis, dass logarithmischen konformen Feldtheorien ähnlich exakt lösbar sind, wie gewöhnliche konforme Feldtheorien, dass also im Prinzip alle Korrelatoren explizit und exakt berechnet werden können. Es gibt aber auch einige überraschende Aspekte, die kein Pendant bei den gewöhnlichen konformen Feldtheorien haben, zum Beispiel die Erweiterung des Satzes von Charakteren um Torusamplituden, die keine Interpretation als Spur über einen Darstellungsmodul zulassen, oder eine interessante Faktorisierungseigenschaft logarithmische Nullvektoren. Ein Beispiel für logarithmische konformem Feldtheorie zieht sich durch die meisten meiner Arbeiten (und auch durch die Arbeiten der meisten anderen Autoren), das Spin (1,0) Geistsystem mit zentraler Ladung $c = -2$, das die am besten verstandene logarithmische Theorie darstellt.

Drei Anwendungen werden kurz vorgestellt, um das Potential der logarithmischen Feltheorie zur erfolgreichen Beschreibung von einer weiten Klasse von Phänomenen, besonders aus der Welt der zwei-dimensionalen Festkörperphysik, zu demonstrieren. Ich diskutiere, in wie weit konforme Feldtheorie zwei-dimensionale Turbulenz beschreibt, und kommen zu der Schlußfolgerung, dass dies nur mit logarithmischen Theorien möglich ist. Ich untersuche die Möglichkeit, die Bulk-Wellenfunktionen der Eigenzustände des fraktionalen Quanten-Hall-Effektes als Korrelatoren von konformen Feldtheorien auszudrücken. Für den speziellen Zustand mit Füllfaktor $\nu = 5/2$ geht dies nur mit Hilfe der logarithmischen $c = -2$ Theorie. Ebenso zeigen ich, dass Jain's Idee des Anheftens von Flußquanten zur Erzeugung von komponierten Fermionen eine Beschreibung in Form von Operatorproduktentwicklungen bzw. Fusionsprodukten in der konformen Feldtheorie hat, wenn dabei Tensorprodukte mit geeigneten logarithmischen konformen Theorien betrachtet werden. Schließlich verwende ich die $c = -2$ Theorie, um die Perioden des Seiberg-Witten-Differentials auf einfache und elegante Weise berechnen zu können. Diese Perioden bestimmen ja den Modulraum der exakten Lösungen effektiver niederenergetischer Feldtheorien von supersymmetrischen Yang-Mills Theorien. Das BPS-Spektrum der masselosen Zustände kann dann besonders einfach durch Operatorproduktentwicklungen gefunden werden, da letztere automatisch degenerierte bzw. Rand-Bereiche des Modulraumes sondieren.

Die hier zusammengefassten Arbeiten ergeben damit einen umfassenden Überblick der Grundlagen der logarithmischen konformen Feldtheorie, sowie einen kleinen Ausblick auf ihr Anwendungspotential.

Verzeichnis der ausgewählten Schriften

- [.I.] **M. Flohr**, *On Modular Invariant Partition Functions of Conformal Field Theories with Logarithmic Operators*, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 4147-4172 [hep-th/9509166].
- [.II.] **M. Flohr**, *On Fusion Rules in Logarithmic Conformal Field Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 1943-1958 [hep-th/9605151].
- [.III.] **M. Flohr**, *Fusion and Tensoring of Conformal Field Theory and Composite Fermion Picture of Fractional Quantum Hall Effect*, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 55-68 [hep-th/9605152].
- [.IV.] **M. Flohr**, *2-Dimensional Turbulence: A Novel Approach via Logarithmic Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B482** (1996) 567-578 [hep-th/9606130].
- [.V.] **M. Flohr, V. Gurarie, C. Nayak**, *The Haldane-Rezayi Quantum Hall State and Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B498** (1997) 513-538 [cond-mat/9701212].
- [.VI.] **M. Flohr**, *Singular Vectors in Logarithmic Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B514** (1998) 523-552 [hep-th/9707090].
- [.VII.] **M. Flohr**, *Logarithmic Conformal Field Theory & Seiberg-Witten Models*, Phys. Lett. **B444** (1998) 179-189 [hep-th/9808169].
- [.VIII.] **M. Flohr**, *Null Vectors in Logarithmic Conformal Field Theory*, Proceedings of the IV. Annual European TMR Conference on Integrability, Non-perturbative Effects and Symmetry in Quantum Field Theory, Paris, September 2000, **D. Bernard, L. Bonora, E. Corrigan, C. Gomez, B. Julia, G. Mussardo, W. Nahm** (eds.), JHEP Proc. Sect. PRHEP-tmr2000/044 [hep-th/0009137].
- [.IX.] **M. Flohr**, *Operator Product Expansion in Logarithmic Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B634** (2002) 511-545 [hep-th/0107242].
- [.X.] **A. Bredthauer, M. Flohr**, *Boundary States in $c = -2$ Logarithmic Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B639** (2002) 450-470 [hep-th/0204154].
- [.XI.] **M. Flohr**, *Bits and Pieces in Logarithmic Conformal Field Theory*, erscheint in Int. J. Mod. Phys. **A** (2003) 1-92 [hep-th/0111228].

Inhalt

.I. Einführung	1
.I.I. Vorgeschichte	3
.II. Grundlagen der LKFT	5
.II.I. Modulgruppe	5
.II.II. Fusionsregeln	7
.II.III. Nullvektoren	9
.II.IV. Operatorprodukte	12
.II.V. Randzustände	15
.III. Anwendungen der LKFT	17
.III.I. Konforme Turbulenz	17
.III.II. Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt	18
.III.III. Seiberg-Witten Theorie	20
.IV. Ausblick & Dank	21
.V. Literatur	22

.I.

Einführung

Als Belavin, Polyakov und Zamolodchikov vor nahezu zwanzig Jahren ihre legendäre Arbeit über zwei-dimensionale konforme Feldtheorien veröffentlichten [3], begann ein beispielloser Siegeszug eines Gebietes der theoretischen und mathematischen Physik, dessen Anwendungen von der Stringtheorie bis in die Festkörperphysik reichen, und das sich zu einem der leistungsfähigsten Werkzeuge moderner theoretischer Physik entwickelt hat (siehe z.B. [19]). Das damals so erstaunliche Ergebnis ihrer Arbeit war, dass Quantenfeldtheorien existieren, die einerseits mathematisch vollkommen rigoros definiert und außerdem nicht-trivial sind, die aber andererseits vollständig lösbar sind. Lösbar bedeutet hier, dass im Prinzip alle Korrelationsfunktionen exakt berechnet werden können.

Eine konforme Feldtheorie ist eine Feldtheorie, deren Korrelationsfunktionen kovariant unter konformen Koordinatenwechseln transformieren. Die konforme Gruppe für $\mathbb{R}^{p,q}$ ist isomorph zu $SO(p+1, q+1)$, und enthält die Lorentz-Gruppe als Untergruppe. Damit hat man zwar eine größere Symmetriegruppe, was aber im allgemeinen nicht ausreicht, Erwartungswerte aller physikalischen Observablen allein aus Symmetrien exakt zu bestimmen. In zwei Dimensionen sieht dies jedoch völlig anders aus. Die konforme Gruppe für den Zylinder in Minkowski-Metrik ist nämlich unendlich-dimensional, $\text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)$. Dies sieht man, indem man chirale Koordinaten auf dem Zylinder einführt, womit er nach Kompaktifizierung zu $S^1 \times S^1$ wird. Der Zylinder entspricht natürlich der einfachsten Weltfläche eines Strings. Die euklidische Version konformer Feldtheorie betrachtet man praktischerweise auf der kompaktifizierten komplexen Ebene, dem \mathbb{CP}^1 . Konforme Transformationen sind bekanntermaßen winkeltreu, was im Komplexen genau holomorphe bzw. anti-holomorphe Abbildungen sind. Allerdings ist die konforme Gruppe der euklidischen Theorie nur endlich-dimensional, und ist durch die Möbius-Transformationen der Riemannschen Zahlenkugel gegeben, die $SL(2, \mathbb{C})$ generieren. Beschränkt man sich jedoch auf lokale statt globaler Symmetrien, betrachtet also lediglich die Algebra infinitesimaler konformer Transformationen, so findet man, dass diese nach wie vor unendlich-dimensional ist. Im Komplexen ist eine infinitesimale konforme Transformation nichts anderes als eine Abbildung

$$z \mapsto z' = z + \varepsilon(z), \quad \bar{\partial}\varepsilon(z) = 0, \quad (1)$$

mit einer analogen, aber unabhängig wählbaren Abbildung für \bar{z} . Hierbei ist $\varepsilon(z)$ eine beliebige Funktion die in einem punktierten Kreisring holomorph ist und daher eine Laurent-Entwicklung besitzt,

$$\varepsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n z^{n+1}. \quad (2)$$

Ein Feld $\Phi(z)$ heißt primär vom Gewicht h , wenn es unter konformen Abbildungen wie ein Tensor vom Range h transformiert, d.h.

$$\Phi(z)(dz)^h = \Phi(z')(dz')^h. \quad (3)$$

Hier, und im folgenden, nehmen wir an, dass alle Betrachtungen separat für holomorphe wie für anti-holomorphe Koordinaten gemacht werden können, so lange wir es nicht anders vermerken. So schreiben wir z.B. $\Phi(z)$, meinen aber ein Feld, das von z und \bar{z} abhängt, $\Phi(z, \bar{z})$, allerdings primär

sowohl unter holomorphen Transformationen mit Gewicht h als auch unter anti-holomorphen Transformationen mit Gewicht \bar{h} ist. Die Gewichte h und \bar{h} sind nicht notwendigerweise gleich, dürfen sich aber nur um eine ganze Zahl unterscheiden, um Lokalität nicht zu verletzen, $h - \bar{h} \in \mathbb{Z}$. Entscheidend ist, wie $\Phi(z)$ unter infinitesimalen konformen Transformationen variiert, nämlich

$$\delta\Phi(z) = [\varepsilon(z)\partial + h(\partial\varepsilon(z))] \Phi(z). \quad (4)$$

Die infinitesimalen Transformationen haben offenbar eine Basis $z \mapsto z' = z + \varepsilon_n z^{n+1}$, unter deren Wirkung $\Phi \mapsto \Phi + \varepsilon_n \delta_n \Phi$ transformiert mit

$$\delta_n \Phi(z) = [z^{n+1}\partial + h(n+1)z^n] \Phi(z). \quad (5)$$

Man konstruiert nun Generatoren L_n für diese Transformationen, so dass $\delta_n \Phi(z) = [L_n, \Phi(z)]$ gilt. Die ALgebra dieser Generatoren ist die berühmte *Virasoro-Algebra*,

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{2} \binom{n+1}{3} \delta_{n+m,0}, \quad (6)$$

wobei c die zentrale Erweiterung ist, die durch die Existenz eines Kozykels impliziert wird, da $H^2(\text{Diff}(S^1)) = 1$ ist. Eine der mathematisch tiefergehenden Konsequenzen der Existenz der zentralen Erweiterung ist, dass eine zwei-dimensionale konforme Feldtheorie automatisch eine Quantenfeldtheorie ist wobei wir nun statt affiner Darstellungen der konformen Algebra auf dem projektiven Hilbertraum lineare Darstellungen der zentral erweiterten Virasoro-Algebra betrachten können. Die globale Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ wird durch die Unter algebra aufgespannt, die durch die L_m , $m \in \{-1, 0, +1\}$, generiert und durch die zentrale Erweiterung nicht beeinflusst wird.

Man beschränkt sich im allgemeinen auf die Höchstgewichtsdarstellungen der konformen Algebra, da diese zu nach unten beschränkten Energiespektren führen. Höchstgewichtsdarstellungen werden durch zyklische Vektoren $|h\rangle$ generiert, die mit den primären Feldern via $\Phi(z=0)|0\rangle = |h\rangle$ zusammenhängen. Dies ist ein spezieller Fall des allgemein gültigen Isomorphismus zwischen dem Raum der Felder und dem Zustandsraum. Der Zustand $|0\rangle$ ist das Vakuum, das definiert ist als der unter der globalen konformen Gruppe vollständig invariante Zustand. Die Höchstgewichtseigenschaft ist

$$L_n |h\rangle = 0 \quad \forall n > 0, \quad L_0 |h\rangle = h |h\rangle. \quad (7)$$

Der Darstellungsmodul wird dann als Verma-Modul mit einer natürlichen Graduierung konstruiert,

$$\mathcal{V}_h = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left\langle L_{n_1} \dots L_{n_k} |h\rangle : \sum_{i=1}^k n_i = n, k \geq 0 \right\rangle \quad (8)$$

Dieser Modul kann allerdings noch Zustände enthalten, die orthogonal zu allen anderen Zuständen sind und daher als Nullzustände entkoppeln. Diese eliminiert man, indem man aus \mathcal{V}_h seinen maximalen echten Untermodul heraussieht, und erhält damit die eigentlichen, irreduziblen, Darstellungsmodul der Virasoro-Algebra.

Die Nullzustände sind Manifestationen der lokalen konformen Symmetrie, da sie zu bestimmten infinitesimalen Transformationen, gegeben durch die entsprechenden Linearkombinationen von Monomen in den Virasoro-Generatoren, korrespondieren. Hat man "viele" Nullzustände, so hat man offenbar viele Erhaltungsgrößen, die helfen können Korrelatoren zu berechnen. Konforme Feldtheorien, bei denen die Symmetrien ausreichen, um alle Korrelationsfunktionen exakt berechnen zu können, heißen auch *rationale konforme Feldtheorien*. Diese Namensgebung liegt darin begründet, dass für solche Theorien die zentrale Ladung c sowie alle möglichen

Höchstgewichte h rationale Zahlen sein müssen. Ferner gibt es, ggfls. bezüglich der maximal erweiterten chiralen Symmetriealgebra, nur endlich viele Höchstgewichtsdarstellungen, so dass die konforme Feldtheorie eine endlich-dimensionale geschlossene Operatoralgebra besitzt.

Diese Arbeit beschäftigt sich nun mit solchen konformen Feldtheorien, bei denen es nicht ausreicht sich auf Höchstgewichtsdarstellungen zu beschränken. Vielmehr gibt es Darstellungen, die reduzibel aber unzerlegbar sind. Im einfachsten Falle hat man zwei Höchstgewichtszustände, $|h; 0\rangle$ und $|h; 1\rangle$, die einen Jordan-Block aufspannen, d.h.

$$L_n|h; 0\rangle = L_n|h; 1\rangle = 0 \quad \forall n > 0, \quad L_0|h; 1\rangle = h|h; 1\rangle + |h; 0\rangle, \quad L_0|h; 0\rangle = h|h; 0\rangle. \quad (9)$$

Die Aktion von L_0 ist nicht diagonalisierbar. Beide Zustände sind Höchstgewichtszustände und $|h; 1\rangle$ ist ein zyklischer Vektor für die unzerlegbare Darstellung \mathcal{R}_h . Die auf $|h; 0\rangle$ aufgebaute Darstellung formt eine irreduzible Unterdarstellung $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{R}_h$. Das Feld zum Zustand $|h; 0\rangle$ ist nach wie vor ein primäres Feld $\Phi_h(z)$, wohingegen das zu $|h; 1\rangle$ gehörende Feld ein sogenannter logarithmischer Partner $\Psi_h(z)$ zum primären Feld $\Phi_h(z)$ ist. Es gibt nun konforme Feldtheorien, bei denen die Operatoralgebra nur dann geschlossen ist, wenn unzerlegbare Darstellungen hinzugenommen werden. Solche konforme Feldtheorien heißen *logarithmisch* aus Gründen, die im folgenden erläutert werden sollen.

.I.I.

Vorgeschichte

Die Namensgebung *logarithmische konforme Feldtheorie* ist, vom heutigen Standpunkt aus betrachtet, etwas unglücklich und irreführend. Was logarithmische von gewöhnlichen konformen Feldtheorien unterscheidet ist die Darstellungstheorie. Im Gegensatz zu normalen konformen Feldtheorien treten bei den logarithmischen Vettern reduzible aber unzerlegbare Höchstgewichtsdarstellungen neben den irreduziblen Höchstgewichtsdarstellungen auf. Historisch gesehen hat aber zunächst das Merkmal, dass Korrelationsfunktionen logarithmische Singularitäten aufweisen können, für Aufmerksamkeit und Verwirrung gesorgt. Heutzutage sind logarithmische konforme Feldtheorien eine fest etablierte eigene Spezies in der Gattung der konformen Feldtheorien und finden eine wachsende Anzahl von Anwendungen.

Vor etwa zehn Jahren schlug A. Zamolodchikov seinem Doktoranden Vircor Gurarie vor, eine bestimmte konforme Feldtheorie unter die Lupe zu nehmen [15], die schon früher unangenehm aufgefallen war, nämlich das Geistsystem zweier antikommutierender Felder von Spin eins und null, das zentrale Ladung $c = -2$ besitzt. Bereits 1987 hat V. Knizhnik bemerkt[25], dass Geistsysteme eine besondere Rolle unter den konformen Feldtheorien spielen. Die antikommutierenden Felder der Geistsysteme verhalten sich unter konformen Koordinatenwechseln genau wie holomorphe Differentiale. Dies macht es besonders verlockend, diese konformen Feldtheorien auf nicht-trivialen Riemannschen Flächen zu betrachten. Realisiert man die Riemannschen Flächen als verzweigte Überlagerungen der komplexen Ebene, so konnte Knizhnik zeigen, dass in Geistsystemen Verzweigungspunkte durch geeignete Vertexoperatoren repräsentiert werden können. Knizhnik erhoffte sich davon eine einfachere Möglichkeit Stringamplituden auf Riemannschen Flächen höheren Geschlechtes zu berechnen. Dazu muss man Korrelationsfunktionen solcher Twist-Vertexoperatoren auswerten. Knizhnik hat ganz allgemein Vier-Punkt-Funktionen für \mathbb{Z}_n -symmetrischen Flächen berechnet und logarithmische Divergenzen festgestellt. Seine Arbeiten stellen damit den ersten Hinweis darauf dar, dass konforme Feldtheorien Korrelationen aufweisen können, die keinen Potenzgesetzen genügen.

Weitere wichtige Hinweise kamen von H. Saleur, teilweise zusammen mit L. Rozansky, in den Jahren 1991-92 [47, 46]. Saleur untersuchte, ob und in wie weit die theoretische Beschreibung zweidimensionaler Polymere, oder zweidimensionaler Perkolation im Kontinuumlimit durch

konforme Feldtheorien möglich ist. Die dichte Phase zweidimensionaler Polymere entspricht dem Problem selbstvermeidender Zufallsbewegungen, und scheint im Kontinuumlimes eben jener $c = -2$ Theorie zuzustreben, die schon Knizhnik aufgefallen war. Saleur identifizierte bestimmte statistische Erwartungsgrößen mit Korrelationsfunktionen dieser konformen Feldtheorie und fand konforme Blöcke mit ganz ähnlichen logarithmischen Singularitäten wie Knizhnik. Zusammen mit Rozansky untersuchte Saleur außerdem konforme Feldtheorien von Wess-Zumino-Witten-Modellen zu Supergruppen, insbesondere am Beispiel der $GL(1,1)$. Super-Lie-Gruppen besitzen natürlicherweise unzerlegbare Darstellungen. Diese Eigenschaft vererben sie an die konformen Feldtheorien, die man aus ihren affinen Erweiterungen konstruieren kann. Rozansky und Saleur fanden, dass die Modultransformationen der Charaktere dieser konformen Feldtheorie nicht in das bis dahin akzeptierte Schema passten. So ist zum Beispiel die T -Matrix nicht diagonalisierbar, hat also Jordan-Blockform. Dass diese beiden Beobachtungen, die an ganz verschiedenen Beispielen gemacht wurden, sehr tief miteinander zusammenhängen, sollte erst viel später klar werden.

Diese Hinweise bewegten jedenfalls Zamolodchikov dazu, die $c = -2$ konforme Feldtheorie genauer zu analysieren. Viktor Gurarie konnte zunächst die logarithmischen Singularitäten in den Vier-Punkt-Funktionen des Twistfeldes $\mu(z)$ mit konformem Gewicht $h = -1/8$ reproduzieren. Die beiden konformen Blöcke sind

$$\langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x)\mu(0) \rangle = [x(1-x)]^{\frac{1}{4}} F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; x\right), \\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-x\right) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; x\right) \log(x) \\ \quad + \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} {}_3F_2\left(\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon, 1; 1 + \epsilon, 1 + \epsilon; x\right) \right|_{\epsilon=0}. \end{cases} \quad (10)$$

Um solche Korrelationsfunktionen im Rahmen einer konformen Feldtheorie asymptotisch ausrechnen zu können, musste Gurarie die üblichen Standardannahmen über die generische Form von Operatorproduktentwicklungen revidieren. Konsistenz mit dem Prinzip der Kreuzungssymmetrie bzw. Dualität der konformen Blöcke von Korrelationsfunktionen kann nur erreicht werden, wenn man die Existenz sogenannter logarithmischer Felder fordert. Diese transformieren nicht wie primäre Felder unter konformen Abbildungen, formen aber zusammen mit ihren primären Partnern Jordan-Blöcke unter der Wirkung der Null-Mode des Virasoro Feldes. Im vorliegenden Beispiel wird im internen Kanal der Vier-Punkt-Funktion die unzerlegbare Darstellung \mathcal{R}_0 zum Höchstgewicht $h = 0$ ausgetauscht, die durch die Identität $\Phi_{h=0}(z) = \mathbb{I}$ und ihren logarithmischen Partner $\Psi_{h=0}(z) = \tilde{\mathbb{I}}(z)$ aufgespannt wird. Die Operatorproduktentwicklung (OPE) des Twist-Feldes zerfällt in zwei Beiträge, nämlich

$$\mu(z)\mu(w) = \begin{cases} (z-w)^{1/4} \mathbb{I}, \\ (z-w)^{1/4} \left[\tilde{\mathbb{I}}(w) + \log(z-w) \mathbb{I} \right]. \end{cases} \quad (11)$$

Guraries Arbeit [15] prägte den Begriff *logarithmischer Operator* und machte gleichzeitig klar, dass diese zu unzerlegbaren Virasoro-Modulen führen. Die Logarithmen in den Vier-Punkt-Funktionen zerstören übrigens nicht deren konforme Invarianz, da das Argument des Logarithmus nur ein harmonisches Verhältnis ist, das selbst auf ganz \mathbb{CP}^1 konform invariant ist.

Die in dieser Schrift gesammelten Arbeiten stellen hauptsächlich unseren Beitrag dar, logarithmische konforme Feldtheorien als eigenständige Klasse konformer Theorien zu etablieren und durch geeignete Verallgemeinerung der Strukturen und Instrumente, die gewöhnliche, insbesondere rationale, konformen Theorien zu einem der leistungsfähigsten Werkzeuge der modernen theoretischen Physik haben werden lassen, den Weg dafür zu ebnen, dass ähnliches auch einmal ihren logarithmischen Geschwistern beschieden sein mag. Ein paar Anwendungen, an denen wir selbst beteiligt waren, haben wir hinzugenommen und diskutieren sie in Abschnitt .III. kurz.

.II.

Grundlagen der LKFT

Das Verständnis logarithmischer konformer Feldtheorien (LKFTn) hat in den letzten Jahren ein Niveau erreicht, das dem der rationalen konformen Feldtheorien (RKFTn) nahe kommt. Alle wichtigen Strukturen und Methoden, die RKFTn zu so erfolgreichen Werkzeugen der modernen theoretischen Physik haben reifen lassen, konnten auf den Fall logarithmischer konformer Feldtheorien übertragen oder verallgemeinert werden, wie zum Beispiel die OPE in der Operatoralgebra, die Definition von Charakteren und Fusionsregeln, die Verlindeformel zur Berechnung der Fusionskoeffizienten, aber auch die Definition von Nullvektoren und Randzuständen. Nicht immer gelingt dies reibungslos, und besonders die Eigenschaft der Rationalität einer konformen Feldtheorie (KFT) muss für logarithmische KFTn gänzlich neu gefaßt werden.

Bei den gewöhnlichen KFTn wurden vertiefte Einsichten zunächst auf dem Level von Korrelationsfunktionen und der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra gewonnen. Erst später folgten Erkenntnisse zur fundamentalen Rolle der Modulgruppe, zur algebraischen Geometrie und zur Theorie der Vertexoperatoralgebren. Interessanterweise verlief die Geschichte bei den logarithmischen KFTn etwas anders, da das Konzept der Modulinvarianz der Zustandssumme hier den ersten Hinweis dafür lieferte, dass diese Theorien wohldefinierte bona fide KFTn sein können.

.II.I.

Modulgruppe

Die eigene Beschäftigung mit LKFTn entsprang aus der Klassifikation rationaler KFTn mit effektiver zentraler Ladung $c_{\text{eff}} \leq 1$, siehe [9]. Ein möglicher Zugang ist die Konstruktion und Klassifikation von chiralen Symmetrie-Algebren in Form von \mathcal{W} -Algebren. Bei der Analyse der Darstellungstheorie bestimmter Serien von \mathcal{W} -Algebren waren KFTn aufgetreten, die als Virasoro-Modelle nicht rational sein konnten, aber $\mathcal{W}(2, 2p - 1, 2p - 1, 2p - 1)$ als erweiterte chirale Symmetrie-Algebra aufwiesen [21]. Die zentralen Ladungen dieser Serie waren gegeben durch $c_{p,1}$, wobei die Serie der Virasoro-minimalen Modelle durch

$$c_{p,q} = 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq} \quad (12)$$

parametrisiert ist. Allerdings gilt für die Virasoro-minimalen Modelle, dass $p, q \geq 3$ sowie teilerfremd sein müssen. Die erlaubten konformen Gewichte, deren zugehörige primäre Felder eine endlich-dimensionale geschlossene Operatoralgebra bilden, sind durch die *Kac-Tabelle*

$$h_{r,s}(c-p, q) = \frac{(pr - qs)^2 - (p-q)^2}{4pq}, \quad 1 \leq r \leq q-1, \quad 1 \leq s \leq p-1, \quad (13)$$

parametrisiert. Die $c_{p,1}$ -Modelle haben also eigentlich eine leere Kac-Tabelle. Dennoch ließen sich Höchstgewichtsdarstellungen für diese Theorien bestimmen, ja sogar die Endlichkeit des Raumes der Höchstgewichte zeigen. Dennoch entzogen sich diese Modelle lange der Einordnung in die bekannten Schemata von RKFTn.

Die erste der hier versammelten Publikationen darf als eine der zentralen Arbeiten angesehen werden, mit denen das neue Forschungsfeld der LKFTn begründet wurde. Die explizite Analyse der bis dahin konstuierten Darstellungen der $c_{p,1}$ -Modelle erlaubte es, insbesondere den Charakter der Vakuumdarstellung zu bestimmen. Unter den üblichen Annahmen an die Operatoralgebra sollten die Elemente $S_{vak,\lambda}$ der S -Matrix der Modultransformation $\tau \mapsto -1/\tau$ sämtlich nicht verschwinden so dass die Modultransformation

$$\chi_{vak}(-1/\tau) = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_{vak,\lambda} \chi_{\lambda}(\tau) \quad (14)$$

die Charaktere aller anderen Module ergeben sollte, deren Menge mit Λ bezeichnet ist. Es ergibt sich jedoch ein völlig anderes Bild: Die Modultransformierte des Vakuumcharakters führt zu Funktionen, die sich nicht durch gute Modulformen ausdrücken lassen. Dies liegt vor allem darin begründet, dass der Vakuumcharakter kein homogenes Gewicht unter Modultransformationen besitzt. Es zeigte sich, dass man entweder eine S -Matrix zulassen muss, deren Koeffizienten keine Konstanten sind, oder dass man Funktionen als Modultransformierte von Charakteren zulassen muss, die keine gute q -Entwicklung, $q = \exp(2\pi i\tau)$, um den Punkt $\tau = +i\infty$ haben. Wir wissen heute, dass diese zusätzlichen Funktionen keine Charaktere sind, sondern Torus-Vakuumamplituden, die zu den unzerlegbaren Darstellungen in Beziehung stehen. Sie sind Elemente des Raumes $\mathbb{C}((q))[\log(q)]$, wobei $\log(q)$ formal für $2\pi i\tau$ steht[34, 35].

Es ist möglich, aus den so gefundenen Charakteren und Torus-Amplituden eine modulinvariante Zustandssumme zu konstruieren. Es existiert jedoch im Gegensatz zu gewöhnlichen KFTn keine diagonale Lösung. Links- und rechts-chirale Anteile werden nicht-trivial miteinander verwoben. Dies war zu erwarten, da auch auf dem Level der Korrelationsfunktionen keine diagonalen Kombinationen der holomorphen und anti-holomorphen konformen Blöcke existieren, die einwertige Funktionen (und damit physikalisch beobachtbare Größen) liefern. Die volle Vier-Punkt-Funktion (10) lautet zum Beispiel [15]

$$\langle \mu(\infty)\mu(1)\mu(x, \bar{x})\mu(0) \rangle = |x(1-x)|^{\frac{1}{2}} \left[F(x)\overline{F(1-x)} - F(1-x)\overline{F(x)} \right]. \quad (15)$$

Die Zustandssummen der bekannten LKFTn haben alle die gleiche Struktur. Die Charaktere der echten irreduziblen und der vollständigen unzerlegbaren Darstellungen sind Linearkombinationen der Dedekindschen η -Funktion $\eta(q) = q^{1/24} \prod_n (1 - q^n)$ und der Jakobi-Riemann Θ -Funktionen

$$\Theta_{\lambda,k}(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(2kn+\lambda)^2/4k}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}/2, \quad k \in \mathbb{Z}_+/2. \quad (16)$$

Unser Beispiel, die LKFTn der $c = c_{p,1}$ Serie besitzen je zwei eigentliche irreduzible Darstellungen mit $h = h_{1,p}$ und $h = h_{1,2p}$. Alle anderen Darstellungen fallen in Quadruplets of je zwei isomorphe unzerlegbare Darstellungen mit je einer darin eingebetteten irreduziblen Unter-Darstellung. Es ist bemerkenswert, dass die beiden irreduziblen Unterdarstellungen nicht äquivalent sind. Der vollständige Satz von Torusamplituden ist

$$\begin{aligned} \chi_{0,p} &= \frac{1}{\eta} \Theta_{0,p}, & \chi_{p,p} &= \frac{1}{\eta} \Theta_{p,p}, \\ \chi_{\lambda,p}^+ &= \frac{1}{p\eta} [(p-\lambda)\Theta_{\lambda,p} + (\partial\Theta)_{\lambda,p}], & \chi_{\lambda,p}^- &= \frac{1}{p\eta} [\lambda\Theta_{\lambda,p} - (\partial\Theta)_{\lambda,p}], \\ \tilde{\chi}_{\lambda,p}^+ &= \frac{1}{\eta} [\Theta_{\lambda,p} + i\alpha\lambda(\nabla\Theta)_{\lambda,p}], & \tilde{\chi}_{\lambda,p}^- &= \frac{1}{\eta} [\Theta_{\lambda,p} - i\alpha(p-\lambda)(\nabla\Theta)_{\lambda,p}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Diese entsprechen den Darstellungen $\mathcal{V}_{1,p}$ und $\mathcal{V}_{1,2p}$ als den echten irreduziblen Darstellungen der fundamentalen Twistsektoren, sowie den Quadruplets ($\mathcal{V}_{1,p-\lambda}, \mathcal{V}_{1,2p-\lambda}, \mathcal{R}_{1,\lambda} \simeq \mathcal{R}_{1,-\lambda}$). Die irreduzible Unterdarstellung von $\mathcal{R}_{1,1}$ liefert den eigentlichen Vakuum-Charakter $\chi_{\mathcal{V}_{1,1}}$, der immer auch eine der affinen $SU(2)$ Θ -Funktionen

$$(\partial\Theta)_{\lambda,k}(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (2kn + \lambda) q^{(2kn+\lambda)^2/4k}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}/2, \quad k \in \mathbb{Z}_+/2 \quad (18)$$

enthält. Diese Modulform hat Gewicht $3/2$, so dass der Vakuum-Charakter kein homogenes Modulgewicht mehr hat. Unter Modultransformationen treten daher weitere Funktionen auf, nämlich $(\nabla\Theta)_{\lambda,k}/\eta = -i\alpha \log(q)(\partial\Theta)_{\lambda,k}/\eta$, wobei α eine beliebige Zahl ist. Diese Funktion kann nicht als Spur über einen Modul angesehen werden, so dass sie auch nicht normiert werden kann (z.B. darauf, dass der Höchstgewichtszustand des Moduls mit Multiplizität eins auftritt). Dies motiviert den freien Parameter α . Die vollständige Zustandssumme

$$Z_{\log}[p, \alpha] = |\chi_{0,p}|^2 + |\chi_{p,p}|^2 + \sum_{\lambda=1}^p \left[\chi_{\lambda,p}^+ \tilde{\chi}_{\lambda,p}^{+*} + \chi_{\lambda,p}^{+*} \tilde{\chi}_{\lambda,p}^+ + \chi_{\lambda,p}^- \tilde{\chi}_{\lambda,p}^{-*} + \chi_{\lambda,p}^{-*} \tilde{\chi}_{\lambda,p}^- \right] \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\eta\eta^*} \left\{ |\Theta_{0,p}|^2 + |\Theta_{p,p}|^2 + \sum_{\lambda=1}^p [2|\Theta_{\lambda,p}|^2 + i\alpha ((\partial\Theta)_{\lambda,p}(\nabla\Theta)_{\lambda,p}^* - (\partial\Theta)_{\lambda,p}^*(\nabla\Theta)_{\lambda,p})] \right\}$$

ist dann modulinvariant für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass die Zustandssumme auch im Limes $\alpha \rightarrow 0$ modulinvariant bleibt, während die Charaktere für $\alpha = 0$ keine geschlossene Darstellung der Modulgruppe mehr formen. Das ungewöhnliche Verhalten des Vakuumcharakters unter Modultransformationen war letztlich der Ausgangspunkt dafür, dass LKFTn inzwischen nicht mehr als bloße Kuriositäten, sondern als ernstzunehmende eigenständige Gruppen von KFTn angesehen werden, die darüber hinaus viele der Eigenschaften von Rationalität aufweisen.

.II.II.

Fusionsalgebra

Von besonderem Interesse sind solche KFTn, bei denen die Operatoralgebra endlich ist. Algebraisch betrachtet heißt dies, dass es nur endlich viele Darstellungen gibt, die unter dem Fusionsprodukt schließen. Das Fusionsprodukt kann man sich dabei als eine Art Tensorprodukt vorstellen, bei dem sich aber die zentrale Ladung nicht addiert. Eine exakte Definition kann im Rahmen der Garbentheorie gegeben werden. Die Fusionskoeffizienten, in etwa vergleichbar den Multiplizitäten bei der Ausreduktion eines Tensorproduktes, sind durch die modularen Eigenschaften der Charaktere vollständig festgelegt. Dieser darstellungstheoretisch fundamentale Zusammenhang wurde von E. Verlinde aufgezeigt [52], konnte aber erst später von Anderson und Moore mathematisch rigoros bewiesen werden [1].

Bei LKFTn kommt es nun aber zu einem Paradoxon. Auf der einen Seite wissen wir, dass es nur endlich viele Darstellungen gibt, auf der anderen Seite erlaubt die explizit bekannte S -Matrix nicht das Anwenden der Verlinde-Formel, da die Matrix-Elemente $S_{vac,r}$, r durchläuft sämtliche inäquivalenten Darstellungen, nicht alle ungleich null sind.

Nun sind die oben gefundenen Torusamplituden nicht alle auch als Charaktere, d.h. als Spuren über die entsprechenden Module, aufzufassen. Nimmt man jedoch den Limes $\alpha \rightarrow 0$, so erhält man genau die physikalischen Charaktere der unzerlegbaren Module. Dies motiviert nun, die Verlinde-Formel durch die Verallgemeinerung

$$N_{ij}^k = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_r \frac{S_i^r S_j^r (S^{-1})_r^k}{S_{vac,r}}, \quad (20)$$

zu ersetzen, wobei die Summe über sämtliche Torusamplituden erstreckt wird. Die S -Matrix ist natürlich wie die Torusamplituden von α abhängig, und solange $\alpha \neq 0$ ist, ist $S_{vac,r} \neq 0$ für alle r . Die daraus resultierenden Kopplungskoeffizienten der Torusamplituden sind erstaunlicherweise polynomial in α und haben damit einen endlichen Grenzwert für $\alpha \rightarrow 0$. Dieser Grenzwert

ergibt Fusionskoeffizienten, die kompatibel mit den Fusionsprodukten sind, die H. Kausch und M. Gaberdiel mit Hilfe von Zhu's Algebra und direkten Berechnungen gefunden haben [12].

Das einzige Problem ist, dass die Summe in (20) nur über inäquivalente Darstellungen erstreckt wird. Die beiden jeweils isomorphen unzerlegbaren Darstellungen können so nicht unterschieden werden. Es stellt sich nun heraus, dass die so gewonnenen Fusionskoeffizienten zum Teil negativ sein können, aber eine strikte \mathbb{Z}_2 -Graduierung aufweisen. Diese resultiert letztlich aus den verschiedenen Vorzeichen, mit denen α in den Torusamplituden der zueinander isomorphen unzerlegbaren Darstellungen auftritt, und kann dazu verwendet werden, die Fusionsregeln konsistent auf die entarteten Darstellungen auszuspalten. H. Kausch und M. Gaberdiel haben im speziellen Fall $c = c_{1,2} = -2$ eine lokale Theorie konstruiert, die links- und rechts-chirale Anteile miteinander so kombiniert, dass alle Korrelationsfunktionen einwertig werden [12]. Dabei müssen chirale Module auf nicht-triviale Weise miteinander kombiniert und zusätzlich bestimmte Ideal herausdividiert werden. Die Lösung von Kausch und Gaberdiel ist eindeutig, es gibt also nur eine Möglichkeit, eine logarithmische lokale Theorie für $c = -2$ zu konstruieren. Die beiden isomorphen unzerlegbaren $h = 0$ Module werden dabei zu einem einzigen unzerlegbaren Modul verschweißt. Allerdings tritt bei ihrer Konstruktion auch in der lokalen Theorie ein zweiter unzerlegbarer Modul auf, der jedoch mit dem ersten identifiziert wird. Dies scheint befriedigend, da die Darstellung von $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ in diesem Beispiel nur fünf- und nicht sechs-dimensional ist. Das Studium der Randzustände dieser Theorie zeigt aber, dass sechs Darstellungen existieren sollten, will man Cardy's Korrespondenz zwischen Randzuständen und Darstellungen der Bulk-Theorie [5] nicht aufgeben.

Es ist instruktiv, sich das $c = -2$ Beispiel etwas näher anzusehen. Wir wollen die konformen Gewichte $h_{1,s}$ aus der Kac-Tabelle wie folgt sortieren: $h_{1,1} = 0$, $h_{1,2} = -\frac{1}{8}$, $h_{1,5} = 1$, $h_{1,4} = \frac{3}{8}$ und schließlich $h_{1,3} = \tilde{0}$, d.h. wir führen zunächst alle irreduziblen (Unter-)Darstellungen auf, und zum Schluß die eine unzerlegbare Darstellung der $c = -2$ Theorie, gekennzeichnet durch \tilde{h} statt h . Die S -Matrix hat damit die Form

$$S_{(2,\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4\alpha} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4\alpha} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2\alpha & 1 & 2\alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

und ist weder eine symmetrische noch eine unitäre Matrix. Auch darin unterscheiden sich allgemein LKFTn von gewöhnlichen rationalen KFTn. Es ist aber weiterhin $S_{(p,\alpha)}^2 = 1\mathbb{1}$. Damit ergeben sich die Fusionsregeln

$$\begin{aligned} [0] \times [\Phi] &= [\Phi], & [\frac{3}{8}] \times [1] &= [-\frac{1}{8}], \\ [-\frac{1}{8}] \times [-\frac{1}{8}] &= 2[0] + 2[1] = [\tilde{0}], & [\frac{3}{8}] \times [\tilde{0}] &= 2[-\frac{1}{8}] + 2[\frac{3}{8}], \\ [-\frac{1}{8}] \times [\frac{3}{8}] &= 2[0] + 2[1] = [\tilde{0}], & [1] \times [1] &= [0], \\ [-\frac{1}{8}] \times [1] &= [\frac{3}{8}], & [1] \times [\tilde{0}] &= 4[0] + 4[1] - [\tilde{0}] = [\tilde{0}], \\ [-\frac{1}{8}] \times [\tilde{0}] &= 2[-\frac{1}{8}] + 2[\frac{3}{8}], & [\tilde{0}] \times [\tilde{0}] &= 8[0] + 8[1] = 4[\tilde{0}]. \\ [\frac{3}{8}] \times [\frac{3}{8}] &= 2[0] + 2[1] = [\tilde{0}], & & \end{aligned} \quad (22)$$

Die S -Matrix kann nur eine der beiden äquivalenten unzerlegbaren Darstellungen einhalten, da sie sonst degeneriert wäre. Führt man nun wieder beide isomorphe unzerlegbare Darstellungen von Hand ein, indem man die Vorzeichen als \mathbb{Z}_2 -Graduierung bezüglich dieser Darstellungsentartung interpretiert, erhält man die korrigierten Regeln

$$\begin{aligned} [-\frac{1}{8}] \times [-\frac{1}{8}] &= [\tilde{0}^+], & [1] \times [\tilde{0}^\pm] &= [\tilde{0}^\mp], \\ [-\frac{1}{8}] \times [\frac{3}{8}] &= [\tilde{0}^-], & [\tilde{0}^\pm] \times [\tilde{0}^\pm] &= 2[\tilde{0}^+] + 2[\tilde{0}^-], \\ [\frac{3}{8}] \times [\frac{3}{8}] &= [\tilde{0}^+], & [\tilde{0}^\pm] \times [\tilde{0}^\mp] &= 2[\tilde{0}^+] + 2[\tilde{0}^-]. \end{aligned} \quad (23)$$

Damit war der erste Schritt geschafft, Rationalität für LKFTn zu verallgemeinern. Es steht inzwischen außer Zweifel, dass rationale LKFTn existieren, und dass eine mathematisch rigorose Definition von Rationalität mit den algebraischen Methoden von Zhu möglich ist [35]. Viele Details sind aber noch nicht vollständig geklärt, was nur verdeutlicht, wie jung und noch in der Entwicklung begriffen dieses Forschungsgebiet ist.

.II.III.

Nullvektoren

Die entscheidende Besonderheit von konformer Feldtheorie in zwei Dimensionen ist die Existenz unendlich vieler Symmetrien, die es erlaubt – zumindest im Prinzip – jede beliebige Korrelationsfunktion exakt zu berechnen. Nun ist aber genau genommen die konforme Gruppe in zwei Dimensionen, $SL(2, \mathbb{C})$, nach wie vor endlich dimensional. Lediglich lokal haben wir die unendlich-dimensionale Algebra der infinitesimalen konformen Transformationen, die Virasoro-Algebra. Die Wirkung der lokalen Transformationen auf ein primäres Feld wird durch die Virasoro-Generatoren vermittelt,

$$[L_n, \Phi(z)] = [z^{n+1}\partial + h(n+1)z^n] \Phi(z), \quad (24)$$

$$T(w)\Phi(z) = \frac{1}{(w-z)^2}\Phi(z) + \frac{1}{(w-z)}\partial\Phi(z) + \text{reguläre Terme}, \quad (25)$$

die nichts anderes als die Laurent-Moden des Energie-Impuls Tensors $T(z)$ darstellen. Der algebraischen Relation haben wir hier die analytische Version zur Seite gestellt. Die Fusionsalgebra hat nämlich eine analytische Entsprechung, die Operatorproduktentwicklung. Die Kommutatoren stehen in kanonischer Weise mit deren singulären Anteil in eins-zu-eins Korrespondenz. Anwenden der Moden L_{-n} , $n > 0$, auf einen Höchstgewichtszustand $|h\rangle$ liefert ein Erzeugendensystem der Zustände des Moduls \mathcal{V}_h . Dabei ist dem Zustand $L_{-\mathbf{n}} \equiv L_{-n_k} \dots L_{-n_2} L_{-n_1} |h\rangle$ das Feld

$$\Phi^{(-\mathbf{n})}(z) = \oint \frac{dw_k}{(w_k - u)^{n_k - 1}} T(w_k) \dots \oint \frac{dw_2}{(w_2 - u)^{n_2 - 1}} T(w_2) \oint \frac{dw_1}{(w_1 - u)^{n_1 - 1}} T(w_1) \Phi(z) \quad (26)$$

zugeordnet. Die Felder $\Phi^{(-\mathbf{n})}(z) \equiv \Phi^{(-n_1, -n_2, \dots, -n_k)}(z)$ heißen Descendants des primären Feldes $\Phi(z)$. Ein beliebiger Zustand $|\chi_h\rangle \in \mathcal{V}_h$ vom Level n ist eine Linearkombination der Form

$$|\chi_h\rangle = \sum_{|\mathbf{n}|=n} \beta^{\mathbf{n}} L_{-\mathbf{n}} |h\rangle, \quad (27)$$

der ein entsprechendes descendantes Feld $\chi_h(z)$ entspricht. Ein solches Feld ist eine Manifestation der Symmetrie unter lokalen konformen Transformationen, wenn jede Korrelationsfunktion mit diesem Feld verschwindet,

$$\langle \Phi_m(z_m) \dots \Phi_2(z_2) \Phi_1(z_1) \chi_h(z) \rangle = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall \Phi_1 \dots \Phi_m. \quad (28)$$

Das algebraische Pendant dieses Sachverhaltes sind die Nullvektoren $|\chi_h\rangle$ mit der Eigenschaft, dass sie orthogonal zu jedem Zustand des Hilbertraumes sind,

$$\langle \chi_h | L_{-\mathbf{n}} |h'\rangle = 0 \quad \forall h', \quad \forall \mathbf{n}. \quad (29)$$

Es sind demnach solche KFTn besonders interessant, die viele solche Nullvektoren enthalten. Die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra liefert nun das Ergebnis, dass ein Verma-Modul entweder

keinen, genau einen oder unendlich viele Nullvektoren enthalten kann [7, 11, 44]. In letzterem Fall hat man damit in der Tat einen unendlichen Satz von Symmetrien explizit zu Hand, und die Theorie ist vollständig lösbar. Die genaue Kenntnis der Nullvektoren ist daher sehr wichtig.

Bei LKFTn ergibt sich die Komplikation, dass unzerlegbare Darstellungen auftreten können. Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, wo die unzerlegbare Darstellung auf einem Jordan-Block von Höchstgewichtszuständen aufbaut. Allgemeinere Strukturen von unzerlegbaren Darstellungen sind möglich und noch weitgehend unerforscht. Ist die chirale Symmetrie-Algebra lediglich die Virasoro-Algebra, so hat man jedoch eine Klassifikation aller möglichen unzerlegbaren Module, die von F. Rohsiepe erarbeitet wurde [45]. Es gibt aber Hinweise, dass vollkommen andersartige unzerlegbare Module existieren [13, 29], so zum Beispiel beim Spin $(2, -1)$ Geistsystem mit $c = -26$. Um die Notation nicht unnötig aufzublähen, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der Jordan-Block vom Rang zwei ist. Ein konformes Feld $\phi_i(z)$ ist dann entweder ein primäres Feld $\Phi_{h_i}(z)$, oder sein logarithmischer Partner $\Psi_{h_i}(z)$, oder ein descendantes Feld. Die Aktion der Virasoro-Moden auf Korrelationsfunktionen ist dann gegeben durch

$$L_n \langle \phi_k(z_k) \dots \phi_2(z_2) \phi_1(z_1) \rangle = \sum_i z^n [z \partial_i + (n+1)(h_i + \delta_{h_i})] \langle \phi_k(z_k) \dots \phi_2(z_2) \phi_1(z_1) \rangle, \quad (30)$$

mit dem off-diagonal wirkenden Operator δ_{h_i} , definiert durch $\delta_{h_i} \Psi_{h_j} = \delta_{ij} \Phi_{h_j}$, $\delta_{h_i} \Phi_{h_j} = 0$. Invarianz unter globalen konformen Transformationen verlangt, dass (30) für $n = -1, 0, 1$ verschwinden muss. Diese Identitäten heißen auch konforme Ward-Identitäten, und sind hier in der modifizierten Form angegeben worden, die bei LKFTn gültig sind.

Ein beliebiger Zustand eines unzerlegbaren Moduls, aufgespannt durch $|h; 1\rangle$ und $|h; 0\rangle$ mit $L_0|h; 1\rangle = h|h; 1\rangle + |h; 0\rangle$, der vom Level n ist, hat die Form

$$|\chi_h\rangle = \sum_{|\mathbf{n}|=n} L_{-\mathbf{n}} (\beta^{\mathbf{n},0}|h; 1\rangle + \beta^{\mathbf{n},1}|h; 0\rangle). \quad (31)$$

Da die Virasoro-Moden nicht mehr diagonal auf Höchstgewichtszuständen operieren, wird aus den linearen Gleichungen (29) ein gekoppeltes System von zwei Sätzen von linearen Gleichungen. Projiziert man auf den Unterraum, der von den descendanten Zuständen auf $|h; 1\rangle$ generiert wird, so erhält man die gleichen Bedingungen, wie für gewöhnliche KFTn,

$$L_{\mathbf{p}} \sum_{|\mathbf{n}|=n} L_{-\mathbf{n}} \beta^{\mathbf{n},0} |h; 1\rangle = \sum_{|\mathbf{n}|=n} \beta^{\mathbf{n},0} f_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(h, c) |h; 1\rangle = 0 \quad \forall |\mathbf{p}| = n. \quad (32)$$

Dies bestimmt die Koeffizienten $\beta^{\mathbf{n},0}$ wie im normalen Fall. Für den letzten Schritt nutzt man die Virasoro-Algebra aus, wobei das Argument h in der Funktion $f_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(h, c)$ durch den diagonalen Teil der Wirkung von L_0 zustande kommt. Der off-diagonale Teil liefert einen *zusätzlichen* Beitrag für den Anteil des Zustandes, der auf $|h; 0\rangle$ aufbaut, so dass sich die Bedingung für diesen Anteil zu

$$\sum_{|\mathbf{n}|=n} (\beta^{\mathbf{n},1} + \beta^{\mathbf{n},0} \partial_h) f_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(h, c) |h; 0\rangle = 0 \quad (33)$$

modifiziert. Die offensichtliche Lösung ist natürlich $\beta^{\mathbf{n},1}(h, c = c^{(1)}(h)) = \partial_h \beta^{\mathbf{n},0}(h, c = c^{(0)}(h))$, wobei zu beachten ist, dass die Lösungen $\beta^{\mathbf{n},k}$ Funktionen allein von h sind. Die zentrale Ladung $c = c^{(k)}(h)$ wird durch die Nullvektorbedingungen nämlich ebenfalls als Funktionen von h fixiert. Da diese Funktionen im allgemeinen verschieden sind, treten logarithmische Nullvektoren jeweils nur für eine endliche Menge diskreter Werte der zentralen Ladung c auf, nämlich nur für die gemeinsamen Schnittpunkte $c^{(1)}(h) = c^{(0)}(h)$.

Dies läßt sich auf Jordan-Blöcke von beliebigem Rang verallgemeinern. Damit ist eine Klassifikation von LKFTn bezüglich ihrer Virasoro-Nullvektoren möglich. Diese ist bis zu Level

fünf explizit durchgeführt worden. Es lassen sich aber auch einige allgemein gültige Aussagen treffen. Zum einen liefert das Auftreten der Ableitung nach dem konformen Gewicht in (33) eine rigorose Grundlage dafür, dass Korrelationsfunktionen mit logarithmischen Operatoren formal durch Ableiten nach den entsprechenden konformen Gewichten aus den Korrelationsfunktionen rein primärer Felder gewonnen werden können. Zusammen mit der Nilpotenz des Operators δ_{h_i} , hier war $(\delta_{h_i})^2 = 0$, kann der gesamte Formalismus für LKFTn elegant in Form von Grassmann-Variablen angegeben werden [42, 24, 37].

Sieht man sich die konformen Gewichte und die zentralen Ladungen an, für die logarithmische Nullvektoren existieren, so drängen sich zwei Beobachtungen auf. Zum einen scheinen Jordan-Blöcke vom Range $r > 2$ im reinen Virasoro-Fall sehr selten zu sein. Zum anderen zeigt sich, dass LKFTn durch die starke Einschränkung an ihr Spektrum überraschend ähnlich zu rationalen KFTn sind. Ob, und in wie weit, LKFTn kontinuierliche Spektren besitzen können, ist noch nicht vollständig geklärt. Hinweise dazu wurden aber von M. Gaberdiel bei der Untersuchung des $SU(2)$ WZW-Modelles zum nicht-unitären Level $k = -4/3$ gefunden [13, 14]. Zumindest die Klasse von LKFTn, die bezüglich der Virasoro-Algebra quasi-rational sind, läßt sich jedoch genauer definieren. Dazu teilen wir rationale konforme Feldtheorien in Klassen $\mathcal{C}(c, N)$ ein, wobei c die effektive zentrale Ladung, und N die Anzahl supersymmetrischer Grassman Dimensionen bezeichne. Mit dieser Notation liegen nicht rationale konforme Feldtheorien dann in einem formalen Sinn in der Klasse $\mathcal{C}(\infty, N)$. In früheren Projekten habe ich eine vollständige Klassifikation von $\mathcal{C}(c \leq 1, N = 0)$ und $\mathcal{C}(c \leq 3/2, N = 1)$ erzielt [9]. Beschränken wir uns auch bei den LKFTm auf eine effektive zentrale Ladung $c \leq 1$, so ist der Raum der rationalen logarithmischen konformen Feldtheorien, unter einer geeigneten Metrik, genau durch $\mathcal{L}(c, N) \subset \partial\mathcal{C}(c, N)$ gegeben, stellt also eine Teilmenge des Randes der gewöhnlichen rationalen KFTn dar. Dies ist nicht unbedingt verwunderlich, da Logarithmen genau dann auftreten, wenn das Spektrum der KFT entartet, also die konformen Gewichte verschiedener Operatoren koinzident werden (modulo \mathbb{Z}). Die oben angesprochene Metrik läßt sich am leichtesten im Raum der Torusamplituden untersuchen. Die Torusamplituden, die nicht als Spuren über Module interpretiert werden können, ergeben sich nämlich als Grenzwert einer Folge von rationalen KFTn. Im Falle der Virasoro-minimalen Modelle $c_{p,q}$ mit p, q teilerfremd führt diese Folge zu immer größeren Kac-Tabellen, die asymptotisch jedoch gegen ein Modell c_{p_∞, q_∞} streben, so dass $(p_n, q_n) \sim (\alpha(n)p_0, \alpha(n)q_0) + (\mathcal{O}(n^{-1}), \mathcal{O}(n^{-1}))$. Im Grenzwert kann die Kac-Tabelle durch eine sehr viel kleinere approximiert werden, da die Teilerfremdheit asymptotisch verloren geht. Korrigiert man in erster Ordnung das Vernachlässigen der Teilerfremdheit, so erhält man genau die Torusamplituden der Virasoro-LKFTn.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der logarithmischen Nullvektoren ist, dass sie immer faktorisieren. In Virasoro-minimalen Modellen existiert dann ein gewöhnlicher Nullvektor für $|h; 0\rangle$ zum Level n_0 , $|\chi_{h;0}^{(n_0)}\rangle = \sum_{|\mathbf{n}|=n_0} \beta^{\mathbf{n}} L_{-\mathbf{n}}|h; 0\rangle$, der als Faktor in dem logarithmischen Nullvektor für $|h; 1\rangle$ auftritt. Letzterer hat einen Level $n_1 > n_0$, und die Form

$$|\chi_{h;1}^{(n_1)}\rangle = \sum_{|\mathbf{m}|=n_1-n_0} \gamma^{\mathbf{m}} L_{-\mathbf{m}}|\chi_{h;1}^{(n_0)}\rangle + (\dots)|h; 0\rangle. \quad (34)$$

Diese Faktorisierungseigenschaft ist bei der Berechnung von Korrelationsfunktionen, die logarithmische Partnerfelder enthalten, sehr nützlich.

Bei allen bekannten LKFTn ist insbesondere die Vakuum-Darstellung Teil einer unzerlegbaren Darstellung, so dass die Identität \mathbb{I} einen logarithmischen Partner besitzt. Eine Konsequenz globaler konformer Invarianz ist nun, dass eine Korrelationsfunktion aus eigentlichen primären Feldern verschwinden muss. In diesem Sinne sind die Twist-Felder keine eigentlichen primären Felder, da ihre OPE untereinander logarithmische Felder produziert [27]. Eigentliche primäre Felder zeichnen sich dadurch aus, dass ihre OPEn immer nur wieder eigentliche primäre Felder und deren Descendants ergeben. Da aber die einzige nicht-verschwindende Ein-Punkt-Funktion

in einer LKFT nicht $\langle \mathbb{I} \rangle$ ist, sondern $\langle \Psi_{h=0} \rangle$, die Kontraktion einer Korrelationsfunktion mit nur eigentlichen primären Feldern aber nie ein logarithmisches Feld ergibt, müssen solche Korrelatoren verschwinden. Man kann dies fortführen, um die allgemeine Form, bis auf Strukturkonstanten, der Zwei- Drei- und Vier-Punkt-Funktionen zu fixieren. Die Zwei-Punkt-Funktionen sind illustrativ, und wurden lange als die charakterisierende Eigenschaft von LKFTn angesehen:

$$\langle \Phi_h(z)\Phi_{h'}(w) \rangle = 0, \quad (35)$$

$$\langle \Phi_h(z)\Psi_{h'}(w) \rangle = \langle \Psi_h(z)\Phi_{h'}(w) \rangle = \delta_{hh'} D_{hh'}^{(0)}(z-w)^{-2h}, \quad (36)$$

$$\langle \Psi_h(z)\Psi_{h'}(w) \rangle = \delta_{hh'} \left[D_{hh'}^{(1)} - 2D_{hh'}^{(0)} \log(z-w) \right] (z-w)^{-2h}. \quad (37)$$

Für die Drei-Punkt-Funktionen ergibt sich ein ähnliches Resultat. Bei den Vier-Punkt-Funktionen tritt eine neue Eigenschaft von LKFTn zutage. Da globale konforme Invarianz nur erlaubt, drei beliebige Punkte festzulegen, bleibt eine Variable frei, die üblicherweise als das harmonische Verhältnis der vier Koordinaten gewählt wird, eine Größe, die unter der Möbius-Gruppe invariant ist. Daher sind Vier-Punkt-Funktionen auch nur bis auf beliebige Funktionen des harmonischen Verhältnisses festgelegt, Für den logarithmischen Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4 \rangle &= \prod_{i<j} z_{ij}^{\mu_{ij}} F^{(0)}(x), \\ \langle \Psi_1\Psi_2\Phi_3\Phi_4 \rangle &= \prod_{i<j} z_{ij}^{\mu_{ij}} \left[F_{12}^{(1)}(x) - 2F^{(0)}(x) \log(z_{12}) \right], \\ \langle \Psi_1\Psi_2\Psi_3\Phi_4 \rangle &= \prod_{i<j} z_{ij}^{\mu_{ij}} \left[F_{123}^{(2)}(x) - \sum_{1\leq k<l\leq 3} \tilde{F}_{kl}^{(1)}(x) \log(z_{kl}) \right. \\ &\quad \left. + 2F^{(0)}(\log(z_{12})\log(z_{13}) + \log(z_{12})\log(z_{23}) + \log(z_{13})\log(z_{23})) \right. \\ &\quad \left. - F^{(0)}(\log^2(z_{12}) + \log^2(z_{13}) + \log^2(z_{23})) \right], \end{aligned} \quad (38)$$

wobei wir dem Leser den sehrlangen Ausdruck für $\langle \Psi_1\Psi_2\Psi_3\Psi_4 \rangle$ erspart, und die Abkürzung $\tilde{F}_{ij}^{(1)} = F_{ik}^{(1)} + F_{jk}^{(1)} - F_{ij}^{(1)}$ verwendet haben. Durch Permutation der Indices erhält man die Korrelatoren, bei denen die logarithmischen Felder an anderen Stellen eingefügt wurden. Die Exponenten μ_{ij} sind eine beliebige Lösung des Gleichungssystems $\sum_{j\neq i} \mu_{ij} = -h_i$.

Wir sehen, dass die Vier-Punkt-Funktionen eine Hierarchie formen. Der Korrelator mit der minimalen Anzahl logarithmischer Felder kann mit Hilfe von Nullvektoren für die primären Felder wie gewohnt ausgerechnet werden. Off-diagonale Terme treten nicht auf, da die Korrelationsfunktion mit keinem logarithmisches Feld verschwindet. Hat man diese Lösung, so kann man den Korrelator mit zwei logarithmischen Feldern lösen, wobei die erste Lösung nun als Inhomogenität auftritt. Diese Eigenschaft macht das Berechnen von nicht-trivialen Korrelationsfunktionen in LKFTn leider sehr mühsam, da es meist sehr viel schwieriger ist, inhomogene gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen, als homogene [33]. Dennoch haben wir gezeigt (dies ist hier nur angedeutet), dass auch für LKFTn die Berechnung von beliebigen Korrelationsfunktionen, zumindestens prinzipiell, exakt möglich ist.

.II.IV.

Operatorprodukte

Bis jetzt haben wir sehr vereinfachende Annahmen zur Struktur der LKFTn, insbesondere zu der Art der unzerlegbaren Darstellungen gemacht. Außerdem haben wir nur den Fall eigentlicher

primärer Felder und ihrer logarithmischen Partner betrachtet. Wir wissen bereits, dass LKFTn auch Twist-Felder enthalten, die in ihren Operatorprodukten logarithmische Felder produzieren können. Daher werden Twist-Felder gelegentlich auch prälogarithmische Felder genannt [26, 27]. Eine weitere implizite Annahme war, dass die unzerlegbare Darstellung auf einem Jordan-Block von Höchstgewichtszuständen aufgebaut ist. Verallgemeinern wir schnell auf beliebigen Rang r , so haben wir vorausgesetzt, dass $L_0|h; k\rangle = h|h; k\rangle + (1 - \delta_{k,0})|h; k-1\rangle$ und $L_n|h; k\rangle = 0 \forall n > 0, k = 0, \dots, r-1$. Insbesondere nehmen wir an, dass alle Zustände $|h; k\rangle$ quasi-primär sind.

Für Darstellungen diesen Typs kann eine generische Form der Operatorprodukte angegeben werden, vorausgesetzt dass das zu $|h; 0\rangle$ korrespondierende primäre Feld ein eigentliches primäres Feld ist. Operatorprodukte können auch allgemein für Twist-Felder angegeben werden, sowie für sogenannte fermionische Felder [22]. Bei unseren Bestrebungen, allgemeine Formen für OPEn anzugeben, stellten wir einen tiefen Zusammenhang zwischen logarithmischen Feldern und kanonisch konjugierten Paaren von Null-Moden fest. Konsistente Operatoralgebren in LKFTn können dann konstruiert werden, wenn der sogenannte *Nullmodengehalt* eines Feldes definiert werden kann. Dies ist die (maximale) Anzahl von Erzeuger-Nullmoden, die in der Modenentwicklung des Feldes in einem Monom auftreten können. Alle explizit bekannten LKFTn haben die Eigenschaft gemein, dass es Paare $\theta^{(i)}, \xi^{(i)}$ kanonisch konjugierter Nullmoden gibt, so dass $\langle 0|\theta^{(i)} = \theta^{(i)}|0\rangle = 0$ ist. Die $\theta^{(i)}$ sind dann die echten Nullmoden, die nach beiden Seiten als Vernichter operieren, die $\xi^{(i)}$ sind ihre Partner, und sind im allgemeinen Erzeuger nach beiden Seiten. Der Nullmodengehalt ist die maximale Anzahl der $\xi^{(i)}$. Diese Nullmoden sind nach dem heutigen Stand der Forschung von fundamentaler Bedeutung für LKFTn. Fjelstad, Fuchs et al. haben kürzlich eine Methode angegeben, LKFTn ganz allgemein als Erweiterungen von gewöhnlichen KFTn durch Deformation der Virasoro-Generatoren mit zusätzlichen Vernichter-Nullmoden zu erhalten [8]. Damit diese Deformationen nicht trivial sind, werden konjugierte Nullmoden hinzugenommen, um die der Hilbertraum der Zustände erweitert wird.

Der Nullmodengehalt $Z(\phi)$ eines Feldes ϕ ist deshalb eine wichtige Größe, da er eine (schwache) Graduierung definiert, $Z(\phi * \psi) \leq Z(\phi) + Z(\psi)$ für das Fusionsprodukt $\phi * \psi$. Da LKFTn aufgrund der unzerlegbaren Darstellungen ihrer chiralen Symmetrie-Algebren notwendigerweise off-diagonale und damit nilpotente Anteile der Symmetrie-Generatoren enthält, gibt es auch einen maximalen Grad eben dieser Nilpotenz. Eine Konsequenz ist, dass es einen maximalen Nullmodengehalt geben muss. In der Tat ist dies bei allen explizit bekannten LKFTn der Fall, und kann einfach dadurch garantiert werden, dass die Nullmoden antikommutierend gewählt werden. Auch dies ist ein gemeinsames Merkmal der soweit bekannten LKFTn, da diese alle eine Realisierung durch antikommutierende freie Felder erlauben. Die Generatoren $W_n^{(j)}$ der Symmetrie-Algebra \mathcal{W} besitzen möglicherweise off-diagonale nilpotente Anteile $\Delta_n^{(j)}$, so dass

$$Z([\Delta_n^{(j)}, \phi(z)]) < Z(\phi) \quad \forall \phi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall W^{(j)} \in \mathcal{W}. \quad (39)$$

Der Nullmodengehalt wird durch die nilpotenten Anteile der Symmetrie-Algebra also strikt reduziert. Mit dieser algebraischen Struktur, von der man leicht ihre Wohldefiniertheit zeigen kann, ist es möglich, alle OPEn einer potentiellen LKFT mit vorgegebenem maximalen Grad der Nilpotenz in ihrer generischen Form anzugeben, ferner alle Ein-, Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen dem Nullmodengehalt und dem Level der Nilpotenz innerhalb einer unzerlegbaren Darstellung nicht trivial. So ist zum Beispiel der Level k in einem Rang r Jordan-Block $|h; k\rangle$, $k = 0, \dots, r-1$, keine strikt graduierte Größe des Fusionsproduktes: Die OPE zweier prälogarithmischer primärer Felder [27], die ja zu irreduziblen Darstellungen gehören und daher Jordan-Level $k = 0$ haben, kann logarithmische Felder enthalten, die zum reduziblen Teil unzerlegbarer Darstellungen korrespondieren und daher Jordan-Level $k > 0$ besitzen.

Wir wollen den Fall unzerlegbarer Darstellung vom Typ des Jordan-Blocks hier kurz explizit

als Beispiel angeben, bemerken aber, dass alle Typen von Darstellungen von LKFTn, für deren Felder ein Nullmodengehalt definiert werden kann, mit den gleichen Methoden behandelt werden können. Es sei der maximale Rang eines solchen Jordan-Blocks von Höchstgewichtszuständen der LKFT r . Dies ist automatisch der Rang der Vakuum-Darstellung, wie man leicht aus den konformen Ward-Identitäten folgert. Eine Korrelationsfunktion ist nun nicht mehr allein durch die konformen Gewichte der Felder festgelegt, wir müssen ferner auch die Jordan-Level berücksichtigen, wobei $\Psi_{(h;k)}$ das Feld zum Zustand $|h; k\rangle$ bezeichnet. Die generische Form von Korrelationsfunktionen enthält natürlich Strukturkonstanten, die ebenfalls vom Jordan-Level abhängen. Es ist ein wichtiges Resultat der konformen Kovarianz, dass die Zwei- und Drei-Punkt-Strukturkonstanten nur von einem einzigen Jordan-Level abhängen, so dass sie, als Matrizen gesehen, eine diagonale Bandstruktur aufweisen. Wir erhalten für die Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen

$$\langle \Psi_{(h_1;k_1)} \Psi_{(h_2;k_2)} \rangle = \sum_{k=r-1}^{k_1+k_2} \delta_{h_1, h_2} D_{(h_1, h_2; k_1+k_2-k)} \frac{1}{k!} (\partial_{h_2})^k (z_{12})^{-2h_2}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{(h_1;k_1)} \Psi_{(h_2;k_2)} \Psi_{(h_3;k_3)} \rangle &= \sum_{k=r-1}^{k_1+k_2+k_3} C_{(h_1, h_2, h_3; k)} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \sum_{j_3=0}^{k_3} \delta_{j_1+j_2+j_3, k_1+k_2+k_3-k} \\ &\times \frac{1}{j_1! j_2! j_3!} (\partial_{h_1})^{j_1} (\partial_{h_2})^{j_2} (\partial_{h_3})^{j_3} (z_{12}^{h_3-h_1-h_2} z_{13}^{h_2-h_1-h_3} z_{23}^{h_1-h_2-h_3}). \end{aligned} \quad (41)$$

Hat man die algebraische Struktur, die durch den Nullmodengehalt induziert wird, verstanden, ist es sehr einfach, daraus die OPEn abzuleiten. Da wir die Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen explizit kennen, können wir die Koeffizienten der OPE ähnlich, wie im Fall gewöhnlicher KFTn erhalten. Die Drei-Punkt-Funktionen definieren $r \times r$ Matrizen $\langle k_3, k_1, k_2 \rangle = (G_{k_1}^{(3)})_{k_2, k_3} = \lim_{z_1 \rightarrow z_2} \langle \Psi_{(h_1;k_1)}(z_1) \Psi_{(h_2;k_2)}(z_2) \Psi_{(h_3;k_3)}(z_3) \rangle$, wobei dieser Limes asymptotisch zu verstehen ist, indem man im wesentlichen z_{13} durch z_{23} ersetzt. Ebenso definieren die Zwei-Punkt-Funktionen Matrizen $\langle k_1, k_2 \rangle = (G_{k_1}^{(2)})_{k_1, k_2} = \langle \Psi_{(h_1;k_1)}(z_1) \Psi_{(h_2;k_2)}(z_2) \rangle$, die invertierbar sind. Man beachte, dass die Matrixelemente Funktionen in den Koordinaten z_i sind. Die "Koeffizienten" der OPE sind nun nichts anderes als Matrixprodukte

$$C_{(h_1, h_2; k_1+k_2)}^{(h_3; k_3)} = (G_{k_1}^{(3)})_{k_2, k} (G_{k_1}^{(2)})^{k, k_3}, \quad (42)$$

die statt einfacher Strukturkonstanten Matrizen $(C_{(h_1; k_1), (h_2; k_2)}^{h_3; k_3})_{k_2}$ definieren, deren Elemente Funktionen der Koordinaten sind. Ähnliche Formeln lassen sich für die anderen Felder und Darstellungstypen angeben, die in LKFTn mit definiertem Nullmodengehalt möglich sind. Die OPE selbst nimmt, etwas expliziter geschrieben, die Form

$$\begin{aligned} \Psi_{h_1; k_1}(z_1) \Psi_{h_2; k_2}(z_2) &= \sum_h \sum_{k=0}^{r-1} \left(\prod_{i=0}^{r-1} \langle i, r-1-i \rangle \right)^{-1} \\ &\times \begin{vmatrix} \langle 0, 0 \rangle & \dots & \langle 0, k-1 \rangle & \langle 0, k_1, k_2 \rangle & \langle 0, k+1 \rangle & \dots & \langle 0, r-1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \ell, 0 \rangle & \dots & \langle \ell, k-1 \rangle & \langle \ell, k_1, k_2 \rangle & \langle \ell, k+1 \rangle & \dots & \langle \ell, r-1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle r-1, 0 \rangle & \dots & \langle r-1, k-1 \rangle & \langle r-1, k_1, k_2 \rangle & \langle r-1, k+1 \rangle & \dots & \langle r-1, r-1 \rangle \end{vmatrix} \Psi_{(h;k)}(z_2) \end{aligned} \quad (43)$$

an. Es ist sogar möglich, unsere Voraussetzung, dass alle den Jordan-Block aufspannenden Zustände quasi-primär sind, deutlich abzuschwächen. Die Aktion der Symmetrie-ALgebra auf den Nullmoden der Felder definiert bei genauer Betrachtung einen BRST-Komplex [37, 14]. Da aber Korrelationsfunktionen nur dann von Null verschieden sein können, wenn ihr gesamter

Nullmodengehalt einerseits ausreichend gross, andererseits nicht fermionisch ist, tragen nur solche die Quasi-Primarität zerstörenden Terme bei, die zu nichtverschwindenden Korrelatoren führen. Die BRST-Struktur der off-diagonalen Anteile der Symmetrie-Algebra garantiert aber nun in vielen Fällen, dass die daraus resultierende Korrelationsfunktion verschwinden muss, wenn die ursprüngliche alle Bedingungen erfüllt, um nicht verschwinden zu müssen.

Die BRST-Struktur, die LKFTn zu Grunde liegt, scheint universell gültig zu sein und ferner eine geometrische Interpretation zu besitzen. Mit ihr wird der so elegante Formalismus der nilpotenten Gewichte auf eine mathematisch exaktere Grundlage gestellt. Die geometrische Interpretation gibt ferner der Deformationskonstruktion von Fjelstad, Fuchs et al. [8], die zunächst ad hoc und etwas künstlich erscheint, einen unmittelbaren Sinn. Sie erlaubt ferner, LKFTn zu konstruieren, die ansonsten nicht in die bisherigen Schemata fallen. Erste Resultate in dieser Richtung wurden zusammen mit M. Krohn erarbeitet [29].

.II.V.

Randzustände

Nachdem alle wesentlichen Strukturen einer KFT erfolgreich auf den logarithmischen Fall verallgemeinert worden sind, zeigt sich, dass LKFTn erstaunlich ähnlich zu rationalen KFTn sind. Mehr noch, der generische irrationale Fall gewöhnlicher KFTn scheint bei logarithmischen KFTn so nicht zu existieren, da ein diskretes Spektrum mit endlicher Entartung bei allen bekannten LKFTn vorliegt. Selbst WZW-Modelle zu fraktionalen, negativen, aber zulässigen Leveln, die ein teilweise kontinuierliches Spektrum aufweisen, sind bezüglich unzerlegbarer Darstellungen zumindest quasi-rational [13].

In den letzten Jahren konzentrierte sich die Forschung bei KFTn auf deren Randzustände [17, 5]. Einerseits sollten physikalisch realistische Modellierungen von zwei-dimensionalen Phänomenen der Festkörperphysik in Betracht ziehen, dass das tatsächliche Experiment mit einer Probe endlicher Ausdehnung gemacht wird, zum anderen spielen Randzustände bei der Beschreibung des D -Brane Spektrums von Stringtheorien eine große Rolle [43]. Es liegt daher nahe, zu untersuchen, ob auch Randzustände konsistent für LKFTn konstruiert werden können [28, 23, 18, 31, 36].

Es tritt auch hier sofort wieder das Problem mit den unzerlegbaren Darstellungen auf. Gemäß dem Formalismus von Cardy existiert eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen Randzuständen und den Höchstgewichtszuständen bzw. den primären Bulk-Feldern. Wie verhält es sich nun bei unzerlegbaren Darstellungen, wo mehrere Höchstgewichtszustände einen Jordan-Block aufspannen? Da der Cardy-Formalismus intensiven Gebrauch von den Eigenschaften der Charaktere und Torus-Zustandssummen macht, liegt es nahe zu vermuten, dass zwei Sorten von Randzuständen existieren sollten: Einerseits gewöhnliche Randzustände, die zu den eigentlichen irreduziblen Darstellungen oder den vollständigen unzerlegbaren Darstellungen korrespondieren, für die auch Charaktere als Spuren über ihre Module definiert werden können; andererseits neuartige Randzustände, die zu den Charakteren der irreduziblen Unterdarstellungen und deren Modultransformaten korrespondieren, wobei letztere keine Interpretation als Charaktere sondern lediglich als Torusamplitude besitzen. Der Formalismus von Cardy macht im Übrigen an keiner Stelle wesentlich davon Gebrauch, dass die Zustandssummen auch als Summen über Charaktere verstanden werden können, so dass das Miteinbeziehen der Torusamplituden von daher auf keine Schwierigkeiten stößt.

In der Tat ist es möglich, für alle Darstellungen, bzw. für alle Torusamplituden, einer LKFT Randzustände zu konstruieren. Es stellt sich heraus, dass eine Untermenge davon nicht strikt Randzustände sind, sondern nur in einem abgeschwächten Sinne als solche verstanden werden können. Diese können aber aus dem Spektrum der Randzustände aus dem selben Grund

nicht eliminiert werden, wie die Charaktere der irreduziblen Unterdarstellungen nicht einfach vernachlässigt werden können. Um die Randzustände effizient untersuchen zu können, muss zunächst ein Algorithmus gefunden werden, mit dem die Randbedingungen auch für Generatoren der Symmetrie-Algebra angegeben und geprüft werden können, die off-diagonale Anteile besitzen. Dies klingt schwieriger als es ist, da man die (sich nicht modifizierende) Virasoro-Algebra zusammen mit der Tatsache, dass alle weiteren Generatoren einer chiralen Symmetrie-Algebra primär bezüglich des Virasoro-Feldes sind, ausnutzen kann: Man braucht dann lediglich die Randbedingungen für L_n , $|n| \leq 2$, und für $W_n^{(j)}$, $n = 0$, zu überprüfen, da alle anderen Randbedingungen durch die Algebra fixiert sind. Ein effizienter Algorithmus, der genau dies leistet, wurde zusammen mit A. Bredthauer entwickelt und erfolgreich auf das Beispiel der $c = -2$ LKFT angewandt. Interessanter Weise ergab sich eine sehr reichhaltige Struktur von Randzuständen, die ferner unter der Wirkung der off-diagonalen Anteile der Symmetrie-Algebra auf exakt die gleiche Art zusammenhängen wie die Höchstgewichtszustände der Darstellungen der *lokalen* Theorie es tun. Die lokale Theorie, die von M. Gaberdiel und H. Kausch konstruiert worden war [12], kombiniert rechts- und links-chirale Anteile auf notwendigerweise nicht-diagonale Art. Die Bedingungen an Randzustände involvieren links- und rechts-chirale Anteile der Symmetrie-Algebra, z.B.

$$(L_{-n} + \bar{L}_n)|h\rangle\rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (44)$$

Ein Zusammenhang zur lokalen Theorie ist also nicht überraschend. Es ist allerdings im höchsten Maße befriedigend, dass dieser Zusammenhang so vollständig und absolut eins-zu-eins besteht. Wie bei den Darstellungen der Modulgruppe durch die Torusamplituden erhalten wir auch hier eine Unterdarstellung der Randzustände, die schon für sich unter der Operatoralgebra der Randfelder schließt. Diese steht, wie zu erwarten, mit der kleineren Darstellung der Modulgruppe durch die Charaktere der vollständigen Module in Beziehung. Die größeren Darstellungen der Modulgruppe wirft allerdings zunächst ein ähnliches Problem auf, wie die Verlinde-Formel bei der Berechnung der Fusionskoeffizienten. Im Cardy-Formalismus sind die physikalischen Randzustände nämlich durch die Linearkombinationen

$$|i\rangle\rangle = \sum_j \frac{S_i^j}{\sqrt{S_{vak}^j}} |j\rangle\rangle \quad (45)$$

gegeben, bei denen ein singulärer Nenner auftritt. Auch hier besteht der Ausweg darin, statt der Charaktere die Torusamplituden zu verwenden, die allerdings Anteile proportional zu $\log(q)$ enthalten. Eine konsistente Lösung kann aber nur gefunden werden, wenn man zum einen die Randzustände, die bezüglich der kleinen Darstellung als Nullzustände herausfallen, dadurch zum Spektrum hinzunimmt, dass man ihnen duale Zustände zur Seite stellt, mit denen sie ein nicht verschwindendes Skalarprodukt $\langle\langle i|\hat{q}|j\rangle\rangle \equiv \langle\langle i|q^{\frac{1}{2}(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12})}|j\rangle\rangle$ aufweisen. Diese dualen Zustände sind die schwachen Randzustände. Man kann sie sehr gut mit den logarithmischen Partnerfeldern vergleichen, ohne die auch bestimmte primäre Felder als Nullzustände vom Spektrum entkoppeln würden [34]. In der Tat muss jedem Randzustand zu einem irreduziblen Untermodul ein schwacher Randzustand als Duales zugeordnet werden, da $\langle\langle h; 0|\hat{q}|h; 0\rangle\rangle = 0$ ist. Der korrekte duale Zustand erfüllt gerade $\langle\langle h^\vee|\hat{q}|h; 0\rangle\rangle = \chi_{|h; 0}(q)$. Die Definition der schwachen Randzustände kann dabei durch geschicktes Normieren mit einem freier Parameter α so vollzogen werden, dass analog zur Verallgemeinerung der Verlinde-Formel auf den logarithmischen Fall der Limes $\alpha \rightarrow 0$ unphysikalische Zustände eliminiert. Überträgt man also die Struktur der Darstellungen der Modulgruppe durch die Torusamplituden auf die Randzustände, so ist dies nahezu perfekt möglich. Der Cardy-Formalismus gilt auch im logarithmischen Fall weiter, wenn man die schwachen Randzustände hinzunimmt, die hier zunächst als duale Zustände definiert wurden. Es ist allerdings noch nicht vollständig geklärt, was die physikalische Bedeutung dieser schwachen Randzustände ist [4]. Klar ist, dass auch die Randzustände durch die Aktion

der off-diagonalen, nilpotenten, Anteile der Symmetrie-Algebra eine BRST-Struktur erhalten. Die schwachen Randzustände sind dann zyklische bzw. generierende Zustände für alle anderen Randzustände zum selben konformen Gewicht. Ferner können die Koeffizienten der physikalischen Zylinderzustandssummen $Z_{i^{\vee}j}$ mit den Fusionskoeffizienten exakt identifiziert werden, wenn man beachtet, dass zum einen die Zylinderzustandssummen über die dualen Zustände definiert werden, und zum anderen die Fusionskoeffizienten von α abhängen, wie in .II.I. beschrieben. So gilt auch im Fall der LKFT

$$n_{i^{\vee}j}^k = N_{ik}^k(\alpha = 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_r \frac{S_r^i(\alpha) S_r^j(\alpha) S_k^r(\alpha)}{S_{vak}^r(\alpha)}, \quad Z_{i^{\vee}j}(q) = \sum_k n_{i^{\vee}j}^k \chi_k(q). \quad (46)$$

.III.

Anwendungen der LKFT

Die logarithmische konforme Feldtheorie erfreut sich in einem zunehmenden Maße Anwendungen. Da LKFTn notwendigerweise nicht unitär sind, wurden die meisten seriösen Anwendungen bis jetzt in der Festkörperphysik und bei dissipativen Systemen gefunden, doch gibt es auch einige interessante Arbeiten zu Aspekten der Stringtheorie. Es ist inzwischen nicht mehr möglich, eine auch nur halbwegs vollständige Liste aller Anwendungen zu geben, ohne jeden Rahmen zu sprengen (siehe die letzte der hier versammelten Arbeiten). In unseren eigenen Arbeiten haben wir uns mit drei Gebieten befasst, bei denen LKFTn eine Rolle spielen oder spielen könnten. Diese sollen abschließend noch ganz kurz vorgestellt werden.

.III.I.

Konforme Turbulenz

Polyakov nahm Anfang der 90er Jahre die Idee, dass zwei-dimensionale kritische Systeme nicht nur skaleninvariant, sondern konform invariant sein sollten, als Anregung, zwei-dimensionale Turbulenz ebenfalls mit Methoden der KFT anzugehen [40]. Turbulenz ist ein in hohem Maße dissipativer Vorgang, so dass eine effektive feldtheoretische Beschreibung nicht unitär sein kann. Die Selbstähnlichkeit der Vortices auf allen Skalen motiviert, dass die effektive Feldtheorie konform invariant gewählt werden kann. Die konformen Ward-Identitäten erinnern sehr stark an die Hopf-Gleichungen, die von den Korrelationsfunktionen des Geschwindigkeitsfeldes $v_\alpha(x)$ erfüllt werden müssen. Üblicherweise drückt man die observablen Größen durch die Vortizität ω und die Strömungsfunktion ψ aus, hier $v_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta \psi$ und $\omega = \varepsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta = \Delta \psi$, die den Navier-Stokes-Gleichungen genügen müssen,

$$\dot{\omega} + \varepsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha \psi \partial_\beta \Delta \psi = \nu \Delta \omega, \quad (47)$$

wobei ν die Viskosität ist. Im Bereich der Turbulenz, also bei großer Reynolds-Zahl, existiert ein Bereich, bei dem sowohl die Viskosität als auch die Verwirbelkraft vernachlässigt werden dürfen, so dass die Hopf-Gleichungen die einfache Form

$$\sum_{p=1}^n \langle \omega(x_1) \dots \dot{\omega}(x_p) \dots \omega(x_n) \rangle = 0. \quad (48)$$

Ist eine Beschreibung mittels KFT korrekt, so muss $\dot{\omega}$ ein descendantes Feld im Modul eines Feldes ϕ sein, das in der OPE $\psi * \psi = \phi + \dots$ als singulärster Beitrag auftritt, genauer

$$\psi(x+a)\psi(x) = |a|^{2(h_\phi - 2h_\psi)}(\phi(x) + \text{Descend.}), \quad \dot{\omega}(x) \propto |a|^{2(h_\phi - 2h_\psi)}[L_{-2}\bar{L}_{-1}^2 - \bar{L}_{-2}L_{-1}^2]\phi(x). \quad (49)$$

Verlangt man weiter, dass die Energiedichte dem phänomenologisch zu erwartenden Kraichnan-Spektrum $E(k) \propto k^{4h_\psi+1} \propto k^{-3}$ entspricht, dann stellt sich heraus, dass $h_\phi = h_\psi$ sein muss, obwohl die Felder ψ und ϕ physikalisch verschieden sind. Kraichnan's Spektrum ist deshalb so interessant, weil es eine unendliche Anzahl von Erhaltungsgrößen $H_n = \int \omega^n(x) d^2x$ respektiert, deren erste nicht triviale, H_2 , Enstrophie genannt wird. Nutzt man asymptotische Entwicklungen dieser Erhaltungsgrößen aus und vergleicht sie mit OPEn der Felder der potentiellen KFT, so erhält man extrem einschränkende diophantische Gleichungen für die konformen Gewichte, z.B. $(h_\phi + 2) + (h_\psi + 1) = 0$. Eine Konsequenz ist, dass die Vortizität als konformes Feld Skalendimension $h_\omega = 0$ haben muss, aber sicherlich nicht die Identität sein kann [6].

Man muss also entweder Kraichnan's Spektrum aufgeben (es gibt Alternativen wie Mofat's Spektrum $k^{-11/3}$ oder Saffman's Spektrum k^{-4} , die aber die Hierarchie der Erhaltungsgrößen nicht mehr vollständig respektieren), oder man ist gezwungen, ein LKFT als Lösung anzunehmen. Erstaunlicherweise lassen die Bedingungen an die konformen Gewichte nur eine einzige einfache Lösung zu, nämlich ein Tensorprodukt aus zwei Kopien der rationalen LKFT mit $c = c_{6,1} = -24$. Da dieses Modell gut bekannt ist, lassen sich die Korrelationsfunktionen explizit betrachten und die Erhaltungsgrößen direkt mit der Operatoralgebra in Beziehung setzen. Dieser Ansatz löst oder umgeht nahezu alle Probleme, die Ansätze mit gewöhnlichen KFTn aufweisen. Ferner haben Skoulakis und Thomas gezeigt [49], dass unser Ansatz auch leicht auf den Fall von magnetohydrodynamischen Systemen verallgemeinert werden kann. Dies ist sicher nicht das letzte Wort in punkto konformer Turbulenz, aber es dürfte klar geworden sein, dass eine KFT-Beschreibung, so sie denn physikalisch sinnvoll sein soll, notwendigerweise logarithmische KFTn benötigt.

.III.II.

Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt

Es gibt wohl kaum ein Phänomen der zwei-dimensionalen Festkörperphysik, das für einen mathematischen Physiker so interessant ist, wie der fraktionale Quanten-Hall-Effekt (QHE). Die Hall-Leitfähigkeiten σ_H sind proportional zu bestimmten rationalen Zahlen, den Füllfaktoren ν , die ein Maß für das Verhältnis der Anzahl der Elektronen zur Anzahl der Flußquanten sind [51, 41, 50]. Der fraktionale QHE ist deshalb so faszinierend, weil nur bestimmte Füllfaktoren zu stabilen Plateaux gehören, an denen sich die Elektronen in einer neuartigen Phasen, sogenannten Quantentropfen befinden. Der erste große Durchbruch zum Verständnis des QHE wurde von R. Laughlin erbracht, der einen genialen Ansatz für die Vielteilchen-Wellenfunktionen der Elektronen machte, die sich in einem inkompressiblen Zustand befinden [30]. Laughlin selbst tat dies zunächst für die Füllfaktoren der Form $\nu = 1/(2p + 1)$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Die nach ihm benannten Test-Wellenfunktionen

$$\Psi_p(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p+1} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |z_i|^2\right), \quad (50)$$

wie üblich ausgedrückt in komplexen Koordinaten, ähneln bis auf den Exponentialfaktor den Korrelationsfunktionen von KFTn freier Felder. Dies veranlasste viele Forscher dazu, die Test-Wellenfunktionen für die Beschreibung der Bulk-Eigenzustände des fraktionalen QHE in Form von konformen Blöcken auszudrücken und eine Verbindung zur KFT zu vermuten, siehe z.B.

[38]. Der Exponentialfaktor stellt kein essentielles Problem dar, da er nach Kompaktifizierung der komplexen Ebene zur Sphäre S^1 verschwindet.

Der Zugang zum fraktionalem QHE mittels KFT ist zwar äußerst elegant, aber bis heute umstritten. Ein Grund dafür ist, dass die meisten KFT-Schemata im Prinzip jedes rationale ν als Füllfaktor gestatten, und insbesondere die natürliche Ordnung der QHE-Zustände aufgrund ihrer experimentell beobachteten Stabilität (z.B. die Breite der zugehörigen Plateaux) in keiner Weise reproduziert. Zwar gibt es eine exakte Beschreibung der sogenannten Randanregungen eines Quantentropfens durch KFTn von WZW Strom-Algebren, die (1+1)-dimensionale Theorien, definiert auf $S^1 \times \mathbb{R}$, sind. Sie sind auf eindeutige Weise mit den (2+1)-dimensionalen Chern-Simons-Theorien verknüpft, die als Kandidaten für eine effektive, feldtheoretische, Beschreibung von fraktionalem QHE-Zuständen gehandelt werden. Es gibt aber keine mathematisch rigorose Methode, aus den Chern-Simons-Theorien auf die (2+0)-dimensionalen KFTn zu schließen, mit denen die Eigenzustände der Quantentropfen beschrieben werden sollen. Da aber andererseits die Form der Test-Funktionen, auch für andere Füllfaktoren als für die Laughlin-Funktionen, so sehr an KFT-Korrelatoren erinnert, kann man versuchen, einen KFT-Zugang direkt zu finden. Zwei solche Zugänge sollen hier vorgestellt werden:

Ein interessanter Ansatz ist Jain's Hierarchie der fraktionalem QHE-Zustände [20]. Hierbei erscheinen die fraktionalem Füllfaktoren von Elektronen wie ganzzahlige Füllfaktoren von sogenannten komponierten Fermionen, bei denen ein Elektron und eine gerade Anzahl $2p$ von Flußquanten die effektiven elementaren Quanten des Systems bilden. Will man nun das Anheften der Flußquanten wörtlich nehmen, so muss man im Prinzip die Übergänge zwischen verschiedenen effektiven Theorien beschreiben. Es ist nun möglich, das Anheften der Flußquanten durch OPEn von Feldern geeigneter KFTn zu beschreiben, die Sektoren unterschiedlicher Statistik, $\theta = \pi/(2p+1)$ und $\theta' = \pi/(2p+3)$, miteinander verweben. Pro Landau-Level erwartet man eine KFT mit (effektiver) zentraler Ladung $c = 1$, da ansonsten das Spektrum am Rand nicht mit dem des WZW-Modells übereinstimmen kann. Da alle rationalen KFTn mit $c_{eff} = 1$ vollständig klassifiziert sind, findet sich eine eindeutiger Satz von Lösungen, der mit den experimentell beobachteten Füllfaktoren in exzellenter Übereinstimmung steht. Insbesondere sagen wir keine Füllfaktoren voraus, die experimentell ausgeschlossen werden können. Neben dem Fusionsprodukt involviert unser Ansatz Tensorprodukte verschiedener KFTn, insbesondere die LKFT mit $c = c_{6,1} = -24$, die uns schon beim Problem der konformen Turbulenz begegnet ist, sowie eine LKFT mit zentraler Ladung $c = c_{3,2} = 0$. Gewöhnlich wird diese KFT als trivial angesehen. Erweitert man sie aber zu einer LKFT, können die Spektren exakt in Übereinstimmung gebracht werden. Dies ist umsomehr interessant, da schon länger vermutet wird, dass nicht trivialen $c = 0$ Theorien Unordnung in Problemen der zwei-dimensionalen Festkörperphysik beschreiben [16, 32, 39]. Es ist bekannt, dass gerade der fraktionalem QHE notwendigerweise Unordnung benötigt um eine gewisse Anzahl von Quantenzuständen durch Anderson-Lokalisierung zu eliminieren.

Ein anderer Ansatz ist geometrischer Natur und wurde zusammen mit Victor Gurarie und Chetan Nayak vorgeschlagen, um den rätselhaften QHE-Zustand mit Füllfaktor $\nu = 5/2$ zu beschreiben. Anders, als die meisten QHE-Zustände, weist dieser einen Füllfaktor mit geradem Nenner auf. Die resultierende Statistik legt es nahe, dass die Elektronen in gepaarten Singlets vorliegen [2]. Zur Erklärung, warum solch ein Zustand überhaupt existieren kann, wurden früh KFT-Methoden herangezogen, und diverse Test-Wellenfunktionen diskutiert, z.B. der Pfaffsche Zustand und der Haldane-Rezayi-Zustand

$$\Psi_{HR}(z_1, w_1, \dots, z_n, w_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n (z_i - w_{\sigma(i)})^{-2} = \langle b(z_1) \partial c(w_1) \dots b(z_n) \partial c(w_n) \rangle. \quad (51)$$

Letzterer interessierte uns besonders, da X.G. Wen et al. zeigen konnten, dass diesem Zustand, wenn überhaupt, nur eine nicht-unitäre KFT mit zentraler Ladung $c = -2$ entsprechen

kann [53]. Unabhängig davon konnte Wen die Entartung des Grundzustandes bei toroidaler Geometrie bestimmen, sie ist zehnfach. Beide Resultate schienen verwirrend, lassen sich aber konsistent erklären, wenn man realisiert, dass die $c = -2$ Theorie ein bc Geistsystem von antikommutierenden Spin (1,0) Feldern ist, das auf dem Torus mit seinen \mathbb{Z}_2 Verzweigungsschnitten gerade eine rationale LKFT mit fünf Darstellungen ergibt. Die Verzweigungspunkte werden ja gerade durch die prälogarithmischen Felder $\mu(z)$ mit $h = -1/8$ simuliert, $\mu(z)\mu(w) = (z-w)^{1/4}(\tilde{\mathbb{I}}(w) + \log(z-w)\mathbb{I})$. Der verbleibende Faktor zwei stammt von einer diskrete $SU(2)$ Symmetrie der vollständigen Theorie. Die zehn verschiedenen Korrelatoren des Grundzustandes (ohne Loch/Flußquant-Anregungen) auf dem Torus wurden von uns explizit angegeben. Die geometrische Interpretation der Flußquanten als Verzweigungspunkte, durch die Wellenfunktionen von QHE-Zuständen in natürlicher Weise holomorphen Differentialen auf nicht trivialen Riemannschen Flächen entsprechen, läßt sich auf die gewöhnlichen Füllfaktoren mit ungeradem Nenner perfekt übertragen, wie wir in Zusammenarbeit mit K. Osterloh gezeigt haben [10].

.III.III.

Seiberg-Witten Theorie

Als letzte kleine Anwendung sei kurz auf die exakte Seiberg-Witten Lösung für effektive supersymmetrische Yang-Mills Feldtheorien in vier Dimensionen eingegangen [48]. Der Modulraum solcher Theorien kann nämlich so parametrisiert werden, dass er exakt dem Modulraum einer Riemannschen Fläche entspricht. Für Eichgruppen vom ADE -Typ ist diese Fläche sogar hyperelliptisch. Die gesamte Information der Theorie ist dann in den Perioden einer meromorphen Differentialform, dem Seiberg-Witten-Differential λ_{SW} enthalten, $a_i = \oint_{\alpha_i} \lambda_{\text{SW}}(z)$ und $a_{D,i} = \oint_{\beta_i} \lambda_{\text{SW}}(z)$ für eine Homologiebasis $(\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}$. Nun sind j -Differentialen auf Riemannschen Flächen durch Korrelationsfunktionen von entsprechenden Geistsystemen mit Spin $(j, 1-j)$ darstellbar, was insbesondere das Auswerten in Randgebieten des Modulraumes, wo zwei Verzweigungspunkte nahe aneinander rücken, mit Hilfe von OPEs-Techniken sehr erleichtert. Das Seiberg-Witten-Differential ist ein Eins-Differential, so dass das entsprechende Geist-System unser alter Bekannter, die $c = -2$ LKFT, ist. Die Perioden von λ_{SW} lassen sich für Eichgruppen, für die die spektrale Fläche hyperelliptisch ist, sämtlich durch Lauricella-Funktionen vom Typ D (das sind verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen mehrerer Variablen) ausdrücken. Diese entsprechen gerade den Feigin-Fuks-Integralen, die beim Auswerten der konformen Blöcke der $c = -2$ LKFT in ihrer bosonisierten Realisierung durch freie Felder auftreten.

Dies beschränkt sich nicht allein auf den masselosen Fall, sondern schließt die Behandlung massiver Hypermultiplets automatisch mit ein, ohne dass am Formalismus etwas geändert werden müsste. Die degenerierten Regionen des Modulraumes sind für die Seiberg-Witten-Theorie besonders wichtig, da sie bei verschwindenden Zykeln auftreten, die wiederum zu BPS-Zuständen gehören, die masselos werden. Solche Zustände können als elementare Teilchen der effektiven Theorie im entsprechenden Parameterbereich (z.B. der Kopplungskonstanten) angesehen werden. Dies ist die explizite Manifestation von Dualität. Die degenerierten Bereiche des Modulraumes sind aber genau die, die mit den KFT-Methoden besonders leicht zu analysieren sind. Für Eichgruppe $SU(N_c)$ mit N_f massiven Hypermultiplets ist λ_{SW} von der Form

$$\lambda_{\text{SW}} = \frac{zdz}{2\pi i} \frac{\prod_{l=1}^{N_c+N_f-1} (z-x_l)}{\prod_{j=1}^{2N_c} (z-e_j)^{1/2} \prod_{i=1}^{N_f} (z-m_i)} = \prod_{l=0}^{N_c+N_f-1} V_1(x_l) \prod_{i=1}^{N_f} V_{-1}(m_i) \prod_{j=1}^{2N_c} \mu(e_j) V_{-2}(\infty) V_1(z) dz, \quad (52)$$

wobei die x_l die Nullstellen der Wronski-Determinante der hyperelliptischen Kurve (genauer die Nullstellen ihrer Metrik $|\lambda_{\text{SW}}|^2$ mit $x_0 = 0$), die e_j die Verzweigungspunkte und die m_i die Massen

der Hypermultiplets sind. Die weiteren Felder der $c = -2$ LKFT sind hier nach Bosonisierung als Vertexoperatoren $V_q(z) = \exp(iq\phi(z))$ eingeführt worden, wobei natürlich $q(\mu) = -1/2$ ist. Die Perioden des Seiberg-Witten-Differentials stehen dann in eins-zu-eins Korrespondenz zu den einfachen Abschirmintegralen über eine Basis der Homologiegruppe. Mit Hilfe der reduzierten Korrelatoren $\langle\langle \prod_i V_{q_i}(z_i) \rangle\rangle = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{-q_i q_j} \langle \prod_i V_{q_i}(z_i) \rangle$ gilt dann $\oint_\gamma \lambda_{\text{SW}} = \langle\langle \lambda_{\text{SW}} \rangle\rangle_\gamma$. Das Bestimmen der masselosen BPS-Zustände ist mit Hilfe des LKFT-Formalismus sehr einfach. Mit den gleichen Methoden sind auch integrable Modelle mit spektralen Kurven zu analysieren.

.IV.

Ausblick & Dank

Logarithmische KFT erfreut sich zunehmenden Interesses. Bei vielen Problemen, bei denen ein Zusammenhang mit konformer Feldtheorie vermutet wird, ließ sich dieser lange nicht zufriedenstellend herstellen. Später stellte sich dann oft heraus, dass die korrekte KFT eben eine logarithmische sein muss. Beispiele dafür sind Polymere, abelsche Sandlawinenmodelle, konforme Turbulenz, Phänomene mit expliziter Unordnung, insbesondere gequenschte Zufallsmagneten, und viele andere. Für andere Probleme ist die Lösung letztlich noch offen, so zum Beispiel bei der Perkolation. Hier wird allerdings erwartet, dass LKFT eine große Rolle spielen wird, ebenso wie allgemein bei Phänomenen, in denen Unordnung eine wesentliche Rolle spielt.

Die hier versammelten Arbeiten haben wesentlich dazu beigetragen, LKFT als ernstzunehmendes Werkzeug der modernen theoretischen Physik zu etablieren. Es wäre aber noch verfrüht zu sagen, dass LKFT ähnlich tiefgehend und mathematisch rigoros verstanden ist, wie gewöhnliche rationale KFT. Viele Aspekte sind noch sehr unzureichend bearbeitet worden, eine Klassifikation von LKFTn liegt in weiter Ferne, es ist nicht bekannt, ob weitere Formen unzerlegbarer Darstellungen möglich sind, die nicht in die bis jetzt bekannten Schemata fallen. Supersymmetrische Versionen von LKFTn sind erst ganz vereinzelt betrachtet worden, ebenso LKFTn, die auf WZW-Modellen mit nicht kompakten Gruppen wie $SL(2, \mathbb{R})$ basieren.

Als einer der Mitbegründer der LKFT als eigenständigem Forschungsgebiet hoffe ich natürlich, dass LKFT noch lange und in zunehmenden Maße Interesse und Anwendungen finden wird. Vielen habe ich für ihre Unterstützung während der letzten Jahre meiner Forschung und besonders während meiner Zeit als Postdoc zu danken. Wissenschaftliche Unterstützung, interessante Diskussionen und Anregungen habe ich unter anderem von bzw. zusammen mit Matthias Gaberdiel, Cesar Gomez, Viktor Gurarie, Horst Kausch, Ian Kogan, Werner Nahm, Shahin Rouhani, Philippe Ruelle, Hubert Saleur, Herman Sierra, Gerard Watts, Peter West, Frank Wilczek, Edward Witten, und vielen anderen erfahren dürfen. Ich möchte auch Victor Gurarie und Chetan Nayak für eine wunderbare Kollaboration danken, sowie besonders meinen Studenten Andreas Bredthauer, Marco Krohn und Klaus Osterloh, mit denen zusammen ich sehr interessante Projekte verwirklichen durfte. Mein Dank gilt natürlich auch allen Mitgliedern des Institutes für Theoretische Physik der Universität Hannover, besonders Olaf Lechtenfeld, als dessen Assistent mir die Möglichkeit gegeben wurde, meine Forschung auf dem Gebiet der LKFT zu diesem ersten Abschluß bringen zu können. Mein größtes Dankeschön gebührt jedoch meiner Frau Birgitt, für all die Jahre gemeinsamen Herumziehens, Ausharrens und manchmal auch Bangens als Postdoc im In- und Ausland. Ohne sie wäre ich als Wissenschaftler nicht dort, wo ich heute bin, und der Leser würde wohl kaum diese Schrift in Händen halten können.

.V.

Literatur

- [1] G. ANDERSON, G. MOORE, *Rationality in Conformal Field Theory*, Commun. Math. Phys. **117** (1988) 441.
- [2] E. ARDONNE, N. READ, E. REZAYI, K. SCHOUTENS, *Non-Abelian Spin-Singlet Quantum Hall States: Wave Functions and Quasihole State Counting*, Nucl. Phys. **B607** (2001) 549 [cond-mat/0104250].
- [3] A.A. BELAVIN, A.M. POLYAKOV, A.B. ZAMOLODCHIKOV, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333.
- [4] A. BREDTHAUER, *Boundary States and Symplectic Fermions*, [hep-th/0207181].
- [5] J.L. CARDY, *Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 581.
- [6] G. FALKOVICH, A. HANANY, *Spectra of Conformal Turbulence*, [hep-th/8212015]; *Is 2d Turbulence a Conformal Turbulence?*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3454-3457 [hep-th/9301030].
- [7] B.L. FEIGIN, D.B. FUKS, *Verma Modules over the Virasoro Algebra*, Funkt. Anal. Appl. **17** (1983) 241; *Verma Modules over the Virasoro Algebra in Topology*, Proc. Leningrad 1982, L.D. FADDEEV, A.A. MAL'CEV (eds.), Lect. Notes Math. **1060** (1984) 230, Springer Verlag.
- [8] J. FJELSTAD, J. FUCHS, S. HWANG, A.M. SEMIKHATOV, I.Y. TIPUNIN, *Logarithmic conformal field theories via logarithmic deformations*, Nucl. Phys. **B633** (2002) 379-413 [hep-th/0201091].
- [9] M. FLOHR, *\mathcal{W} -Algebras, New Rational Models and the Completeness of the $c = 1$ Classification*, Commun. Math. Phys. **157** (1993) 179 [hep-th/9207019]; *Curiosities at Effective $c = 1$* , Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 1071 [hep-th/9312097]; *The Rational Conformal Quantum Field Theories in Two Dimensions with Effective Central Charge $c_{\text{eff}} \leq 1$* , PhD Thesis (1994).
- [10] M. FLOHR, K. OSTERLOH, *A Novel CFT Approach to Bulk Wave Functions in the Fractional Quantum Hall Effect*, [cond-mat/0208429].
- [11] D. FRIEDAN, Z. QIU, S. SHENKER, *Details of the Non-Unitarity proof for Highest Weight Representations of the Virasoro Algebra*, Commun. Math. Phys. **107** (1986) 535.
- [12] M.R. GABERDIEL, H.G. KAUSCH, *Indecomposable Fusion Products*, Nucl. Phys. **B477** (1996) 293 [hep-th/9604026]; *A rational logarithmic conformal field theory*, Phys. Lett. **B386** (1996) 131 [hep-th/9606050]; *A local logarithmic conformal field theory*, Nucl. Phys. **B538** (1999) 631 [hep-th/9807091].
- [13] M.R. GABERDIEL, *Fusion rules and logarithmic representations of a WZW model at fractional level*, [hep-th/0105046].
- [14] M.R. GABERDIEL, *An algebraic approach to logarithmic conformal field theory*, [hep-th/0111260].
- [15] V. GURARIE, *Logarithmic operators in conformal field theory*, Nucl. Phys. **B410** (1993) 535 [hep-th/9303160].

- [16] V. GURARIE, A. LUDWIG, *Conformal Algebras of 2D Disordered Systems*, [cond-mat/9911392].
- [17] N. ISHIBASHI, *Boundary and crosscap states in conformal field theories*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 251.
- [18] Y. ISHIMOTO, *Boundary states in boundary logarithmic CFT*, Nucl. Phys. **B619** (2001) 415 [hep-th/0103064]
- [19] C. ITZYKSON, H. SALEUR, J.-B. ZUBER (editors), *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics*, Singapore: World Scientific (1988).
- [20] J.K. JAIN, *Composite-Fermion Approach for the Fractional Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 199.
- [21] H.G. KAUSCH, Phys. Lett. **B259** (1991) 448.
- [22] H.G. KAUSCH, *Curiosities at $c = -2$* , [hep-th/9510149]; *Symplectic fermions*, Nucl. Phys. **B583** (2000) 513 [hep-th/0003029].
- [23] S. KAWAI, J.F. WHEATER, *Modular transformation and boundary states in logarithmic conformal field theory*, Phys. Lett. **B508** (2001) 203 [hep-th/0103197].
- [24] M. KHORRAMI, A. AGHAMOHAMMADI, M.R. RAHIMI-TABAR, *Logarithmic conformal field theories with continuous weights*, Phys. Lett. **B419** (1998) 179 [hep-th/9711155].
- [25] V.G. KNIZHNIK, *Analytic Fields on Riemann Surfaces, II*, Commun. Math. Phys. **112** (1987) 567.
- [26] I.I. KOGAN, C. MUDRY, A.M. TSVELIK, *The Liouville Theory as a Model for Prelocalized States in Disordered Conductors*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 707 [cond-mat/9602163].
- [27] I.I. KOGAN, A. LEWIS, *Origin of logarithmic operators in conformal field theories*, Nucl. Phys. **B509** (1998) 687 [hep-th/9705240]; *Vacuum instability in Chern-Simons theory, null vectors and two-dimensional logarithmic operators*, Phys. Lett. **B431** (1998) 77 [hep-th/9802102].
- [28] I.I. KOGAN, J.F. WHEATER, *Boundary logarithmic conformal field theory*, Phys. Lett. **B486** (2000) 353 [hep-th/0103064].
- [29] M. KROHN, M. FLOHR, *Ghost Systems Revisited: Modified Virasoro Generators and Logarithmic Conformal Field Theories*, [hep-th/0212016].
- [30] R.B. LAUGHLIN, *Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1395.
- [31] A. LEWIS, *Logarithmic CFT on the boundary and the world-sheet*, [hep-th/0009096].
- [32] Z. MAASSARANI, D. SERBAN, *Non-unitary conformal field theory and logarithmic operators for disordered systems*, Nucl. Phys. **B489** (1997) 603 [hep-th/9605062].
- [33] S. MAHIEU, P. RUELLE, *Scaling fields in the two-dimensional abelian sandpile model*, [hep-th/0107150].
- [34] A. MILAS, *Weak modules and logarithmic intertwining operators for vertex operator algebras*, [math.QA/0101167].
- [35] M. MIYAMATO, *Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2 -cofiniteness*, [math.QA/0209101].
- [36] S. MOGHIMI-ARAGHI, S. ROUHANI, *Logarithmic conformal field theories near a boundary*, Lett. Math. Phys. **2000** (2000) 49 [hep-th/0002142].

- [37] S. MOGHIMI-ARAGHI, S. ROUHANI, M. SAADAT, *Logarithmic conformal field theory through nilpotent conformal dimensions*, Nucl. Phys. **B599** (2001) 531 [hep-th/0008165]; *Current algebra associated with logarithmic conformal field theories*, [hep-th/0012149].
- [38] G.W. MOORE, N. READ, *Nonabelions in the Fractional Quantum Hall Effect*, Nucl. Phys. **B360** (1991) 362; *Fractional Quantum Hall Effect and Non-Abelian Statistics*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **107** (1992) 157 [hep-th/9202001].
- [39] A. NICHOLS, *Stress Energy Tensor in $c = 0$ Logarithmic Conformal Field Theory*, [hep-th/0203207].
- [40] A.M. POLYAKOV, *The Theory of Turbulence in Two Dimensions*, Nucl. Phys. **B396** (1993) 367-385 [hep-th/9212145]; [hep-th/9209046].
- [41] R.E. PRANGE, S.M. GIRVIN (editors), *The Quantum Hall Effect*, New York: Springer Verlag (1987).
- [42] M.R. RAHIMI-TABAR, A. AGHAMOHAMMADI, M. KHORRAMI, *The logarithmic conformal field theories*, Nucl. Phys. **B497** (1997) 555 [hep-th/9610168].
- [43] A. RECKNAGEL, V. SCHOMERUS, *D-branes in Gepner models*, Nucl. Phys. **B531** (1998) 185 [hep-th/9712186].
- [44] A. ROCHA-CARIDI, *Vacuum Vector Representations of the Virasoro Algebra in Vertex Operators in Mathematics and Physics*, S. MANDELSTAM, I.M. SINGER (eds.), World Scientific (1984) 451; *On Highest Weight and Fock Space Representations of the Virasoro Algebra*, Proc. Symp. Pure Math. **49**, Part I (1989) 259.
- [45] F. ROHSIEPE, *On reducible but indecomposable representations of the Virasoro algebra*, [hep-th/9611160].
- [46] L. ROZANSKY, H. SALEUR, Nucl. Phys. **B376** (1992) 461; *S and T matrices for the super $U(1,1)$ WZW model. Application to surgery and 3-manifold invariants based on the Alexander Conway polynomial*, Nucl. Phys. **B389** (1993) 365 [hep-th/9203069].
- [47] H. SALEUR, *Polymers and percolation in two dimensions and twisted $N = 2$ supersymmetry*, Nucl. Phys. **B382** (1992) 486 [hep-th/9111007]; *Geometrical Lattice models for $N=2$ supersymmetric theories in two dimensions*, Nucl. Phys. **B382** (1992) 532 [hep-th/9111008].
- [48] N. SEIBERG, E. WITTEN, *Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $N = 2$ Supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. **B431** (1994) 484-550 [hep-th/9408099]; *Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, and Confinement in $N = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19-52, Erratum ibid. **B430** (1994) 485-486 [hep-th/9407087].
- [49] S. SKOULAKIS, S. THOMAS, *Logarithmic conformal field theory solutions of two dimensional magnetohydrodynamics*, Phys. Lett. **B438** (1998) 301 [cond-mat/9802040].
- [50] M. STONE (editor), *Quantum Hall Effect*, Singapore: World Scientific (1992).
- [51] D.C. TSUI, H.L. STÖRMER, A.C. GOSSARD, *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1559.
- [52] E. VERLINDE, *Fusion Rules and Modular Transformations in 2d Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B300** [FS22] (1988) 360.
- [53] X.G. WEN, Y.S. WU, Y. HATSUGAI, *Chiral Operator Product Algebra and Edge Excitations of a Fractional Quantum Hall Droplet*, Nucl. Phys. **B422** (1994) 476.